Jukka Kangasaho ◦ Jukka Mäkinen ◦ Juha Oikkonen ◦
Johannes Paasonen ◦ Maija Salmela ◦ Jorma Tahvanainen

Pitkä matematiikka 13

Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi

Sanoma Pro Oy
Helsinki

Tiedustelut
Sanoma Pro Oy, Helsinki
puh. 020 391 000
sähköposti: asiakaspalvelu@sanomapro.fi

www.sanomapro.fi

Kustantaja: Sanoma Pro Oy

Tämä aineisto on digitaalinen rinnakkaisversio tuotteesta
ISBN 978-952-63-2544-6 Pitkä matematiikka 13

12 kk lisenssi ISBN 978-952-63-2385-5
48 kk lisenssi ISBN 978-952-63-2386-2

Toimitus: Ville Sipiläinen
Ulkoasu: graafinen suunnittelu Veera Alanko,
Kansi Timo Jokivartio
Taitto: Jukka Nieminen
Piirrokset: Picman Oy, Pekka Könönen ja Tuomas Könönen

© Jukka Kangasaho, Jukka Mäkinen, Juha Oikkonen, Johannes Paasonen,
Maija Salmela, Jorma Tahvanainen ja Sanoma Pro Oy

Kopiointiehdot

Tämä teos on digitaalinen oppikirja, joka on suojattu tekijänoikeuslailla (404/61).

Lukijalle

Pitkä matematiikka

Useimmat luonnontieteiden ja tekniikan saavutukset perustuvat matematiikan tuloksiin, niin myös yhä enemmän monet yhteiskuntatieteiden ja humanististen tieteiden oivallukset. Pelkän teoreettisen uteliaisuudenkin innoittamana löydetty matemaattinen tieto on usein osoittautunut yllättävän hyödylliseksi. Matematiikassa yhdistyy kiehtovalla tavalla kaksi piirrettä: se on luovan ajattelun ja oivaltamisen leikkiä ja samalla täsmällistä ja loogista.

Pitkä matematiikka -sarjan tavoitteena on, että opiskelija matematiikan tietojen ja taitojen lisäksi oppii ymmärtämään matematiikan erityisluonteen tiedonalana, jossa teoreettinen kohtaa käytännöllisen ja jossa luova oivaltaminen kohtaa täsmällisen loogisuuden.

Eteneminen

Luvun avaa aihepiiriin johdatteleva ongelma tai esimerkki. Uusi teoreettinen tieto kootaan ja perustellaan, ja lisäesimerkit opastavat tiedon hyväksikäyttöön ja syventämiseen. Esimerkit on laadittu niin, että opiskelijat voivat omaksua ne itsenäisesti. Siten tuntityöskentelyssä voidaan usein jo aikaisessa vaiheessa siirtyä itsenäiseen harjoitteluun, jolloin opiskelijat etenevät omassa tahdissaan kirjan esimerkkejä hyödyntäen. Näin menetellen kaikki opiskelijat harjaantuvat perustaidoissa, ja samalla nopeammin etenevillä on mahdollisuus tietojen ja taitojen syventämiseen. Kun opiskelijat ohjataan hyödyntämään kirjan esimerkkejä ja teoriaosuuksia, tarve vihkomuistiinpanojen tekemiseen vähenee ja opiskelijat voivat paremmin keskittyä opetukseen.

Harjoittelu

Lukujen harjoitukset ovat kahtena sarjana.

Sarja I sisältää perustehtäviä, jotka harjoittavat uusia menetelmiä, tukevat teoreettisen tiedon ymmärtämistä ja juurruttamista sekä ohjaavat opitun soveltamiseen. Enimmäkseen tehtävät heijastelevat luvun esimerkkien tilanteita. Sarjaa I voidaan käyttää esimerkiksi oppitunnin aikana tapahtuvaan harjoitteluun.

Sarja II sisältää perustehtävien lisäksi vaativampia tehtäviä, joissa usein on myös matematiikan harrastamiseen innostavaa syventävää tietoa. Sarjasta II voidaan valikoida oppitunnin mittaan havaittujen tarpeiden mukaiset helpommat ja vaativammat kotitehtävät.

Kirjan esimerkit ja teoriaosuudet ovat apuna myös kotitehtävien parissa työskenneltäessä. Kaikkia tarpeellisina pidettyjä tietoja tai sovellustilanteita ei siis tarvitse käsitellä oppitunnin aikana, vaan niihin voidaan perehtyä ratkaistaessa kotitehtäviä kirjan esimerkkien avulla.

Kertaaminen

Opiskelijat voivat kerrata koko kurssin kertausluvun avulla. Luvussa käydään ensin läpi kurssin koko sisältö esimerkeillä havainnollistettuna. Sen jälkeen on samojen otsikoiden mukaan järjestettyjä riittävän osaamisen takaavia perustehtäviä. Kertausluvun päättävissä tehtäväsarjoissa on vaativampia tehtäviä koko kurssin alueelta. Kertausluvun tehtävien vastauksissa on, kuten monien tehtävien vastauksissa kautta koko kurssin, ratkaisemista tukevia ohjeita.

Opettajan materiaali

Kirjan opettajan materiaali on Sanoma Pro Oppimisympäristössä. Materiaalissa muun muassa pohditaan opetusmenetelmiä ja selvennetään kirjan ja sen eri lukujen tavoitteita ja niiden ilmenemistä esimerkeissä ja tehtävissä. Lisäksi materiaali tarjoaa työskentelyn avuksi kalvopohjia ja testejä. Opettajan materiaali sisältää myös kaikkien tehtävien yksityiskohtaiset ratkaisut.

Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi

Kurssilla syvennetään ja täydennetään pitkän matematiikan pakollisilla kursseilla opittuja differentiaali- ja integraalilaskennan tietoja.

Differentiaali- ja integraalilaskennan keskeisin käsite on raja-arvo, joka kurssin mittaan kohdataan monissa eri tilanteissa: tutkittaessa funktion jatkuvuutta ja funktion derivaattaa, tutkittaessa funktioiden arvoja lukusuoran äärilaidoilla sekä tutkittaessa lukujonoja ja niistä muodostettuja summia. Kurssilla opitaan myös hyödyntämään jatkuvien ja derivoituvien funktioiden yleisiä ominaisuuksia ja derivoimaan funktion käänteisfunktio. Lisäksi täydennetään integraalilaskennan tietoja ja opitaan soveltamaan niitä muun muassa jatkuvien satunnaismuuttujien tutkimiseen.

Toivotamme mielenkiintoisia ja tuloksellisia työskentelyhetkiä.

Helsingissä 15.8.2007

Tekijät

Ajankäyttöehdotus

Tässä ajankäyttöehdotuksessa kurssin opiskeluun käytetään 28 oppituntia.

Luku	Tuntimäärä
Paloittain määritelty funktio	2
Funktion raja-arvo	2
Funktion jatkuvuus	2
Derivaatta	2
Raja-arvo äärettömyydessä	3
Käänteisfunktio	2
Käänteisfunktion derivaatta	2
Integraalifunktio ja määrätty integraali	3
Epäoleellinen integraali	2
Jatkuvat todennäköisyysjakaumat	2
Lukujonon raja-arvo	3
Sarja	1
Geometrinen sarja	2

Sisällys

Paloittain määritelty funktio 7
Funktion raja-arvo 16
Funktion jatkuvuus 29
Derivaatta 42
Raja-arvo äärettömyydessä 54
Käänteisfunktio 72
Käänteisfunktion derivaatta 85
Integraalifunktio ja määrätty integraali 93
Epäoleellinen integraali 108
Jatkuvat todennäköisyysjakaumat 120
Lukujonon raja-arvo 136
Sarja 150
Geometrinen sarja 160

Kertaus 173
Kertaustehtäviä 195
Tehtäväsarjoja 200
Tehtävien vastaukset 203
Hakemisto 253

Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003 (ote)

Matematiikan pitkä oppimäärä

Matematiikan pitkän oppimäärän opetuksen tehtävänä on antaa opiskelijalle matemaattiset valmiudet, joita tarvitaan ammatillisissa opinnoissa ja korkeakouluopinnoissa. Pitkän matematiikan opinnoissa opiskelijalla on tilaisuus omaksua matemaattisia käsitteitä ja menetelmiä sekä oppia ymmärtämään matemaattisen tiedon luonnetta. Opetus pyrkii myös antamaan opiskelijalle selkeän käsityksen matematiikan merkityksestä yhteiskunnan kehityksessä sekä sen soveltamismahdollisuuksista arkielämässä, tieteessä ja tekniikassa.

Opetuksen tavoitteet

Matematiikan pitkän oppimäärän opetuksen tavoitteena on, että opiskelija

- tottuu pitkäjänteiseen työskentelyyn ja oppii sitä kautta luottamaan omiin matemaattisiin kykyihinsä, taitoihinsa ja ajatteluunsa
- rohkaistuu kokeilevaan ja tutkivaan toimintaan, ratkaisujen keksimiseen sekä niiden kriittiseen arviointiin
- ymmärtää ja osaa käyttää matematiikan kieltä, kuten seuraamaan matemaattisen tiedon esittämistä, lukemaan matemaattista tekstiä, keskustelemaan matematiikasta, ja oppii arvostamaan esityksen täsmällisyyttä ja perustelujen selkeyttä
- oppii näkemään matemaattisen tiedon loogisena rakenteena
- kehittää lausekkeiden käsittely-, päättely- ja ongelmanratkaisutaitojaan
- harjaantuu käsittelemään tietoa matematiikalle ominaisella tavalla, tottuu tekemään otaksumia, tutkimaan niiden oikeellisuutta ja laatimaan perusteluja sekä arvioimaan perustelujen pätevyyttä ja tulosten yleistettävyyttä
- harjaantuu mallintamaan käytännön ongelmatilanteita ja hyödyntämään erilaisia ratkaisustrategioita
- osaa käyttää tarkoituksenmukaisia matemaattisia menetelmiä, teknisiä apuvälineitä ja tietolähteitä.

13. Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi (MAA13)

Tavoitteet

Kurssin tavoitteena on, että opiskelija

- syventää differentiaali- ja integraalilaskennan teoreettisten perusteiden tuntemustaan
- täydentää integraalilaskennan taitojaan ja soveltaa niitä muun muassa jatkuvien todennäköisyysjakaumien tutkimiseen
- tutkii lukujonon raja-arvoa, sarjoja ja niiden summia.

Keskeiset sisällöt

- funktion jatkuvuuden ja derivoituvuuden tutkiminen
- jatkuvien ja derivoituvien funktioiden yleisiä ominaisuuksia
- funktioiden ja lukujonojen raja-arvot äärettömyydessä
- epäoleelliset integraalit

Paloittain määritelty funktio

Funktiomerkintä $f: A \to \mathbb{R}$

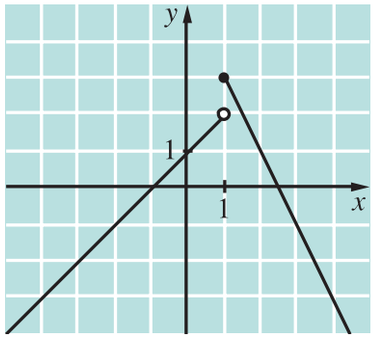
Kun funktion kuvailussa halutaan ilmaista, mikä funktion määrittelyjoukko on, voidaan käyttää merkintää

$f: A \to \mathbb{R}$.

Merkintä tarkoittaa, että funktion f määrittelyjoukko on A ja että funktion f arvot ovat reaalilukuja.*

Ongelma

Kuvassa on erään funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kuvaaja, joka muodostuu kahdesta puolisuorasta. Umpinainen ympyrä pisteessä $(1, 3)$ tarkoittaa, että piste kuuluu kuvaajaan, ja avoin ympyrä pisteessä $(1, 2)$ tarkoittaa, että piste ei kuulu kuvaajaan.



Päättele kuvaajasta

a) funktion f arvot $f(-3)$, $f(0{,}999)$, $f(1)$ ja $f(3)$
b) millä muuttujan arvoilla funktion f arvo on 1
c) funktion f nollakohdat
d) funktion f lauseke.

Paloittain määritelty funktio

Funktio, jolla on määrittelyjoukon eri osissa eri sääntö, on *paloittain määritelty funktio*.

---

* Lukiomatematiikassa tutkitaan ainoastaan sellaisia funktioita, joiden määrittelyjoukko on reaalilukujen joukon osajoukko ja joiden arvot ovat reaalilukuja. Matematiikassa tutkitaan myös esimerkiksi funktioita $f: A \to \mathbb{C}$, missä funktion arvot ovat kompleksilukuja, ja funktioita $f: A \to \mathbb{R}^2$ tai $f: A \to \mathbb{R}^3$, missä funktion arvot ovat tason pisteitä $(\mathbb{R}^2)$ tai kolmiulotteisen avaruuden pisteitä $(\mathbb{R}^3)$. Vastaavasti funktion määrittelyjoukko A voi olla esimerkiksi kompleksilukujen joukon, tason tai kolmiulotteisen avaruuden osajoukko.

ESIMERKKI 1

Määritellään funktio $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 \text{ , kun } x < 2 \\ \frac{1}{2}x \quad \text{ , kun } x \geqslant 2. \end{cases}$$

Laske funktion f arvot $f(-1)$, $f(2)$ ja $f(4)$. Piirrä funktion f kuvaaja.

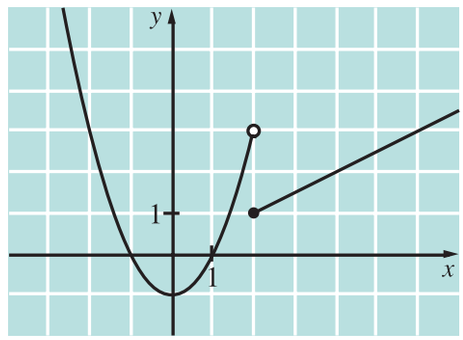
Ratkaisu

Välillä $]-\infty, 2[$ funktion f arvo lasketaan lausekkeella $x^2 - 1$ ja välillä $[2, \infty[$ lausekkeella $\frac{1}{2}x$.

Koska $-1 < 2$, niin $f(-1) = (-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$.

Koska $2 \geqslant 2$, niin $f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$.

Koska $4 > 2$, niin $f(4) = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$.



Välillä $]-\infty, 2[$ funktion f kuvaaja on paraabeli $y = x^2 - 1$ ja välillä $[2, \infty[$ kuvaaja on suora $y = \frac{1}{2}x$.
Koska $f(2) = 1$, suoran piste $(2, 1)$ kuluu kuvaajaan. Tämä ilmaistaan pisteeseen $(2, 1)$ piirretyllä umpinaisella ympyrällä. Paraabelin piste $(2, 3)$ ei kuulu kuvaajaan. Tämä ilmaistaan pisteeseen $(2, 3)$ piirretyllä avoimella ympyrällä.*

Vastaus

$f(-1) = 0,\ f(2) = 1,\ f(4) = 2$

---

* Paloittain määritellyn funktion kuvaajan voi piirtää joillakin graafisilla laskimilla käyttämällä laskimen tuntemia niin sanottuja totuusfunktioita. Esimerkiksi funktio $y = (x < 2)$ on totuusfunktio, jonka arvo kohdassa x on 1, kun $x < 2$ (ehto $x < 2$ on tosi), ja 0, kun $x \geqslant 2$ (ehto $x < 2$ on epätosi). Esimerkin funktio on siten $y = (x^2 - 1)(x < 2) + (\frac{1}{2}x)(x \geqslant 2)$. Kohdassa $x = 2$ laskimen piirtämä kuvaaja on kuitenkin virheellinen, sillä laskin yhdistää viivalla kaikki laskemansa kuvaajan pisteet.

ESIMERKKI 2

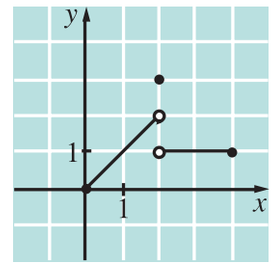
Piirrä funktion $f\colon [0, 4] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ kun } 0 \leqslant x < 2 \\ 3, \text{ kun } x = 2 \\ 1, \text{ kun } 2 < x \leqslant 4, \end{cases}$$

kuvaaja.

Ratkaisu

Funktion f määrittelyjoukko on suljettu väli $[0, 4]$. Kuvaaja muodostuu kahdesta janasta (osia suorista $y = x$ ja $y = 1$) ja pisteestä $(2, 3)$. Janojen päätepisteet $(0, 0)$ ja $(4, 1)$ kuuluvat kuvaajaan. Päätepisteet $(2, 2)$ ja $(2, 1)$ eivät kuulu kuvaajaan.



ESIMERKKI 3

Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x, \text{ kun } x \leqslant -1 \\ -x + 5, \text{ kun } x > -1. \end{cases}$$

Ratkaise yhtälö $f(x) = 6$.

Ratkaisu

Ratkaistaan yhtälö erikseen alueissa $]-\infty, -1]$ ja $]-1, \infty[$.

Kun $x \leqslant -1$, niin $f(x) = x^2 + x$.

$$x^2 + x = 6$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$ Yhtälö ratkaistaan ratkaisukaavalla.

$$x = 2 \text{ tai } x = -3$$

Vain juuri -3 toteuttaa ehdon $x \leqslant -1$. Välillä $]-\infty, -1]$ yhtälöllä $f(x) = 6$ on ratkaisu $x = -3$.

Kun $x > -1$, niin $f(x) = -x + 5$.

$$\begin{aligned} -x + 5 &= 6 \\ -x &= 1 \qquad \big| \cdot (-1) \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Luku -1 ei toteuta ehtoa $x > -1$. Välillä $]-1, \infty[$ yhtälöllä $f(x) = 6$ ei ole ratkaisua.

Yhtälön $f(x) = 6$ ratkaisu on $x = -3$.

Vastaus $x = -3$

ESIMERKKI 4

Ilmaise funktio paloittain määriteltynä funktiona ilman itseisarvomerkkejä. Piirrä funktion kuvaaja. a) $|x|$ b) $|2x - 3|$ c) $|x^2 + 3x|$

Ratkaisu a) Jos luku x on epänegatiivinen, luvun x itseisarvo on luku x itse:

Jos $x \geqslant 0$, niin $|x| = x$.

Jos luku x on negatiivinen, luvun x itseisarvo on luvun vastaluku $-x$:

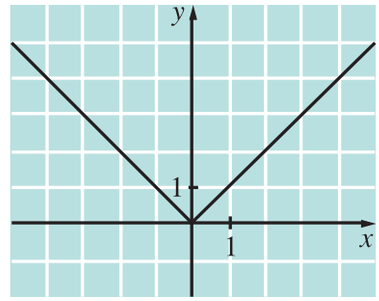
Jos $x < 0$, niin $|x| = -x$.*

Siis

$$|x| = \begin{cases} -x, \text{ kun } x < 0 \\ x, \text{ kun } x \geqslant 0. \end{cases}$$

* Tässäkin voisi olla mukana luku nolla eli $x \leqslant 0$, sillä nollan vastaluku on nolla.

Funktion $|x|$ kuvaajaan kuuluu suoran $y = x$ se osa, missä $x \geqslant 0$, ja suoran $y = -x$ se osa, missä $x < 0$.



b) Luvun $2x - 3$ itseisarvo on luku $2x - 3$ itse, kun luku $2x - 3$ on epänegatiivinen. Luvun $2x - 3$ itseisarvo on vastaluku $-(2x - 3) = -2x + 3$ silloin, kun luku $2x - 3$ on negatiivinen.

Ratkaistaan, millä muuttujan x arvoilla luku $2x - 3$ on epänegatiivinen.*

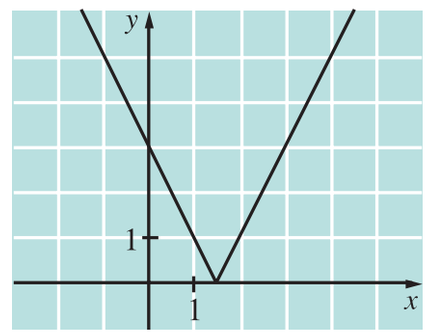
$$\begin{aligned} 2x - 3 &\geqslant 0 \\ 2x &\geqslant 3 \qquad\qquad \big| : 2 \ (> 0) \\ x &\geqslant \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Kun $x < \frac{3}{2}$, luku $2x - 3$ on negatiivinen.

Siis

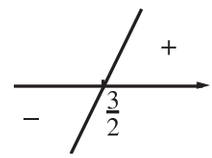
$$|2x - 3| = \begin{cases} -2x + 3, \text{ kun } x < \frac{3}{2} \\ 2x - 3, \text{ kun } x \geqslant \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Funktion $|2x - 3|$ kuvaajaan kuuluu suoran $y = 2x - 3$ se osa, missä $x \geqslant \frac{3}{2}$, ja suoran $y = -2x + 3$ se osa, missä $x < \frac{3}{2}$.

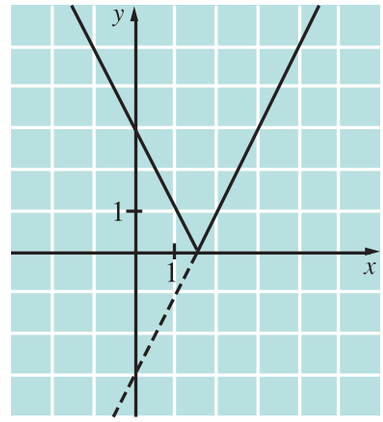


---

* Lausekkeen $2x - 3$ merkit voidaan selvittää myös ratkaisemalla nollakohta $\frac{3}{2}$ ja päättelemällä merkit funktion $2x - 3$ hahmotellusta kuvaajasta (nouseva suora).



Funktion $|2x - 3|$ kuvaaja voidaan piirtää myös niin, että funktion $2x - 3$ kuvaajan (suoran $y = 2x - 3$) x-akselin alapuolella oleva osa peilataan x-akselin suhteen.*



c) Tutkitaan, millä muuttujan arvoilla funktion $x^2 + 3x$ arvot ovat epänegatiivisia ja millä muuttujan arvoilla negatiivisia.

Polynomifunktio voi vaihtaa merkkiään ainoastaan nollakohdissaan. Ratkaistaan funktion $x^2 + 3x$ nollakohdat.

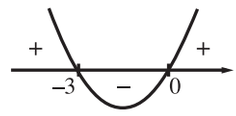
$$x^2 + 3x = 0$$

$$x(x + 3) = 0$$

$$x = 0 \text{ tai } x + 3 = 0$$

$$x = 0 \text{ tai } \quad x = -3$$

Funktion $x^2 + 3x$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



Funktion $x^2 + 3x$ arvot ovat epänegatiivisia, kun $x \leqslant -3$ tai $x \geqslant 0$. Tällöin luvun $x^2 + 3x$ itseisarvo on luku itse.

Funktion $x^2 + 3x$ arvot ovat negatiivisia, kun $-3 < x < 0$. Tällöin luvun $x^2 + 3x$ itseisarvo on vastaluku $-(x^2 + 3x) = -x^2 - 3x$.

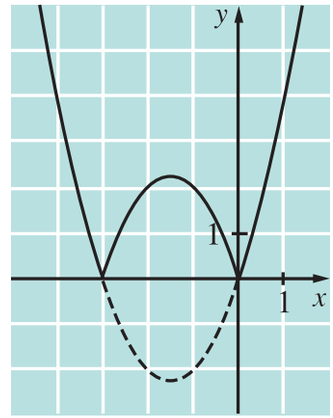
Siis

$$|x^2 + 3x| = \begin{cases} x^2 + 3x, \text{ kun } x \leqslant -3 \\ -x^2 - 3x, \text{ kun } -3 < x < 0 \\ x^2 + 3x, \text{ kun } x \geqslant 0. \end{cases}$$

---

* Funktion $|2x - 3|$ kuvaajan, samoin kuin muidenkin tämän esimerkin funktioiden kuvaajat, voi piirtää myös graafisella laskimella. Itseisarvofunktio on laskimessa abs (engl. *absolute value*). Funktio $|2x - 3|$ näppäillään laskimeen muodossa abs(2x – 3).

Funktion $|x^2 + 3x|$ kuvaaja saadaan peilaamalla funktion $x^2 + 3x$ kuvaajan x-akselin alapuolinen osa x-akselin suhteen.



Vastaus

a) $$|x| = \begin{cases} -x, \text{ kun } x < 0 \\ x, \text{ kun } x \geqslant 0 \end{cases}$$

b) $$|2x - 3| = \begin{cases} -2x + 3, \text{ kun } x < \frac{3}{2} \\ 2x - 3, \text{ kun } x \geqslant \frac{3}{2} \end{cases}$$

c) $$|x^2 + 3x| = \begin{cases} x^2 + 3x, \text{ kun } x \leqslant -3 \\ -x^2 - 3x, \text{ kun } -3 < x < 0 \\ x^2 + 3x, \text{ kun } x \geqslant 0 \end{cases}$$

TEHTÄVIÄ

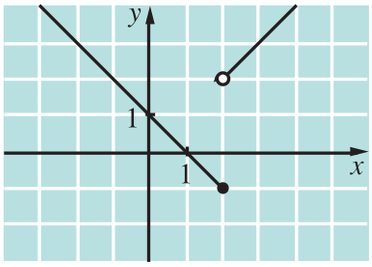
SARJA I.
PERUSTEHTÄVIÄ

1. Laske funktion

$$f(x) = \begin{cases} -x + 3, \text{ kun } x \leqslant 2 \\ x - 2, \text{ kun } x > 2 \end{cases}$$

arvot $f(0)$, $f(2)$ ja $f(3)$. Piirrä funktion f kuvaaja.

2. Kuvion funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kuvaaja muodostuu kahdesta puolisuorasta. Päättele kuvaajasta
a) funktion f arvot $f(-1)$, $f(2)$ ja $f(3)$
b) funktion f lauseke.

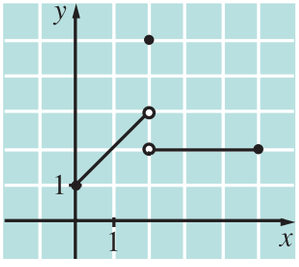


3. Piirrä funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, \text{ kun } x \neq 2 \\ 1 \quad\;\; , \text{ kun } x = 2, \end{cases}$$

kuvaaja.

4. Kuviossa on erään funktion $f : [0, 5] \to \mathbb{R}$ kuvaaja. Mikä funktion f lauseke on?



5. Määritellään funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3, \text{ kun } x \leqslant 0 \\ 3x^2 - x, \text{ kun } x > 0. \end{cases}$$

Määritä funktion f nollakohdat.

6. Lentorahdin kuljetusmaksu koostuu 25 euron perusmaksusta, jonka lisäksi maksetaan 2 €/kg 30 ensimmäiseltä kilogrammalta ja 3 €/kg painorajan 30 kg ylittävästä painosta. Muodosta funktio $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$, jonka arvo $f(x)$ on x kilogramman painoisen paketin kuljetusmaksu euroina. Paljonko painoi paketti, jonka kuljetusmaksu oli a) 74 euroa b) 148 euroa?

7. Ilmaise funktion lauseke ilman itseisarvomerkkejä. Piirrä kuvaaja.
a) $|x + 3|$ b) $x + |4 - x|$

8. Ilmaise funktion lauseke ilman itseisarvomerkkejä. Piirrä kuvaaja.

a) $\dfrac{x}{|x|}$ b) $x|x|$

9. Ilmaise funktion lauseke ilman itseisarvomerkkejä. Piirrä kuvaaja.
a) $f(x) = |x^2 - 1|$ b) $g(x) = x^2 - |x^2 - 1|$

10. Ilmaise funktio $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ paloittain määriteltynä funktiona ilman itseisarvomerkkejä ja piirrä funktion f kuvaaja, kun

a) $f(x) = \dfrac{|x^2 - 1|}{x - 1}$ b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{|x - 1|}$.

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

11. Laske funktion

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2, & \text{kun } x \leqslant 3 \\ x^2, & \text{kun } x > 3 \end{cases}$$

arvot $f(\sqrt{8})$, $f(\sqrt{10})$ ja $f(3)$.

12. Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kuvaaja koostuu paraabelista $y = 3 - x^2$, josta on poistettu piste $(0, 3)$, sekä pisteestä $(0, 1)$. Mikä funktion h lauseke on?

13. Piirrä funktion $f : [0, 4] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } 0 \leqslant x < 2 \\ 3, & \text{kun } x = 2 \\ 4 - x, & \text{kun } 2 < x \leqslant 4, \end{cases}$$

kuvaaja.

14. Määritellään funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 10, & \text{kun } x \leqslant 1 \\ 4x + 2, & \text{kun } x > 1. \end{cases}$$

Missä kohdissa funktio f saa arvon -1?

15. Muodosta funktio $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$, jonka arvo $f(t)$ on t euron perinnöstä maksettavan perintöveron määrä.

Perintö- ja lahjaveroasteikko 2007

Perinnön verotettava arvo euroa	Vero alarajalla euroa	Vero alarajan ylittävästä osasta %
3 400–17 000	85	10
17 000–50 000	1 445	13
50 000–	5 735	16

16. Ilmaise funktio paloittain määriteltynä funktiona ilman itseisarvomerkkejä ja piirrä funktion kuvaaja.

a) $f(x) = |5 - 2x|$ b) $g(x) = |x + 1| + |x - 3|$

17. Ilmaise funktio paloittain määriteltynä funktiona ilman itseisarvomerkkejä.

a) $f(x) = \dfrac{e^{-|x|}}{|x|}$ b) $g(x) = \dfrac{e^{|1-x|}}{e^{1+x}}$

18. Ilmaise funktion $f(x) = |4 - x^2| - x^2$ lauseke ilman itseisarvomerkkejä. Piirrä kuvaaja.

19. a) Piirrä samaan koordinaatistoon funktioiden $f(x) = 2|x|$ ja $g(x) = |x - 2|$ kuvaajat.
b) Ratkaise kuvaajien leikkauspisteet.

20. Ilmaise funktion $f(x) = \dfrac{|x^2 - 1|}{|x| - 1}$ lauseke ilman itseisarvomerkkejä ja piirrä funktion kuvaaja.

21. Piirrä funktion $f(x) = |\ln |x - 2||$ kuvaaja. Millä väleillä funktio kasvaa ja millä se vähenee? Esitä funktio kullakin välillä siten, että lausekkeissa ei esiinny itseisarvoja. Millä x:n arvoilla funktio saa pienimmän arvonsa?
(Ylioppilaskoe, s. 2003)

Funktion raja-arvo

KERTAUSESIMERKKI 1

Määritä funktion $\frac{x^2-9}{x+3}$ raja-arvo kohdassa a) 4 b) –3.

Ratkaisu

a) Funktio $\frac{x^2-9}{x+3}$ on määritelty kohdassa $x = 4$. Kun muuttujan x arvot lähenevät lukua 4, funktion $\frac{x^2-9}{x+3}$ arvot lähenevät lukua

$$\frac{4^2-9}{4+3} = \frac{7}{7} = 1.$$

Siis

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2-9}{x+3} = \frac{4^2-9}{4+3} = 1.$$

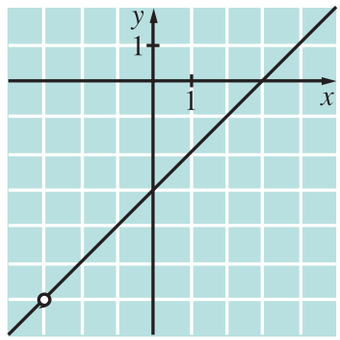
Voidaan myös merkitä:

$$\frac{x^2-9}{x+3} \to \frac{4^2-9}{4+3} = 1, \text{ kun } x \to 4.$$

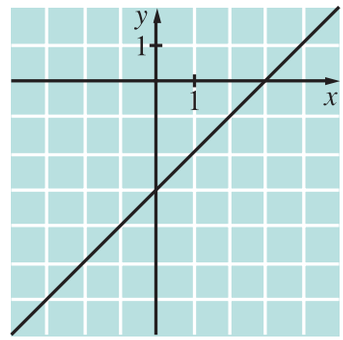
b) Funktio $\frac{x^2-9}{x+3}$ ei ole määritelty kohdassa $x=-3$, sillä tällöin nimittäjän arvoksi tulee nolla. Funktion lauseke voidaan kuitenkin supistaa binomilla $x+3$:

$$\frac{x^2-9}{x+3} = \frac{\overset{1}{\cancel{(x+3)}}(x-3)}{\underset{1}{\cancel{x+3}}} = x-3.$$

Kun $x \neq -3$, funktioiden $\frac{x^2-9}{x+3}$ ja $x-3$ arvot ovat yhtä suuret. Kun muuttujan x arvot lähenevät lukua -3, funktioiden arvot lähenevät siten samaa lukua.



funktion $\frac{x^2-9}{x+3}$ kuvaaja



funktion $x-3$ kuvaaja

Siis

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^2-9}{x+3} = \lim_{x \to -3} (x-3) = -3-3 = -6.$$

Voidaan myös merkitä:

$$\frac{x^2-9}{x+3} = x-3 \to -3-3 = -6, \text{ kun } x \to -3.$$

Vastaus a) 1 b) -6

KERTAUSESIMERKKI 2

Määritä vakio a niin, että funktiolla $f(x) = \dfrac{4x^2 + a}{x - 5}$ on raja-arvo kohdassa 5. Mikä funktion f raja-arvo kohdassa 5 tällöin on?

Ratkaisu

Funktion $f(x) = \dfrac{4x^2 + a}{x - 5}$ nimittäjän arvo kohdassa 5 on 0. Tällöin välttämätön* ehto sille, että funktiolla f on raja-arvo kohdassa 5, on, että kohta 5 on myös osoittajan nollakohta eli että funktio f on kohdassa 5 ”muotoa $\dfrac{0}{0}$”.

Siis tulee olla:

$$4 \cdot 5^2 + a = 0$$

$$100 + a = 0$$

$$a = -100.$$

Tällöin

$$\lim_{x \to 5} f(x) = \lim_{x \to 5} \frac{4x^2 - 100}{x - 5} = \lim_{x \to 5} \frac{4(x^2 - 25)}{x - 5} = \lim_{x \to 5} \frac{4(x + 5)\cancel{(x - 5)}^{1}}{\cancel{x - 5}_{1}}$$

$$= \lim_{x \to 5} 4(x + 5) = 4(5 + 5) = 40.$$

Vastaus

$a = -100$, raja-arvo 40

---

* Ehto ei ole riittävä, sillä esimerkiksi funktio $\dfrac{x - 1}{(x - 1)^2}$ on kohdassa 1 ”muotoa $\dfrac{0}{0}$”, mutta funktiolla $\dfrac{x - 1}{(x - 1)^2} = \dfrac{1}{x - 1}$ ei ole raja-arvoa kohdassa 1.

Koko differentiaali- ja integraalilaskenta perustuu raja-arvon käsitteeseen.

Raja-arvon määritelmä

Oletetaan, että funktio f on määritelty kohdan a ympärillä, mutta ei välttämättä kohdassa a. Funktiolla f on kohdassa a *raja-arvo* b, jos muuttujan arvojen lähestyessä arvoa a funktion f arvot lähestyvät lukua b. Lähestymisen tulee olla sellaista, että tulemalla tarpeeksi lähelle lukua a saadaan funktion f arvot niin lähelle lukua b, kuin suinkin halutaan.

Jos funktiolla f on kohdassa a raja-arvo b, niin merkitään

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

tai

$f(x) \to b$, kun $x \to a$.

Määritelmässä ei oleteta mitään funktion f arvosta $f(a)$, ei edes, että tämä arvo on olemassa. Funktion f arvoja tutkitaan vain kohdan a läheisyydessä, ei kohdassa a.

Raja-arvon perustelemista määritelmän mukaisesti havainnollistetaan tehtävissä 47–49.

Monilla funktioilla on seuraava ominaisuus, jota käytettiin hyväksi kertausesimerkkien 1 ja 2 ratkaisuissa.

Tavallisten funktioiden raja-arvo kohdassa, jossa funktio on määritelty

Jos funktio f kuuluu johonkin seuraavista funktioluokista*

funktio	esimerkki
potenssifunktio	x^5
polynomifunktio	$7x^3 - 4x + 9$
rationaalifunktio	$\frac{x^3 - 1}{x^2 + 5x}$
juurifunktio	$\sqrt[4]{x}$
eksponenttifunktio	3^x
logaritmifunktio	$\log_2 x$
trigonometrinen funktio	$\cos x$

tai jos funktio f on tällaisten funktioiden summa, erotus, tulo, osamäärä tai näin saatujen funktioiden yhdistetty funktio tai käänteisfunktio, niin pätee:

> Jos funktio f on määritelty kohdassa a, niin $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Siis tavallisten funktioiden raja-arvo sellaisessa kohdassa a, jossa funktio on määritelty, on sama kuin funktion arvo kohdassa a. Tämä tarkoittaa samaa kuin funktion *jatkuvuus*. Funktion jatkuvuutta käsitellään seuraavassa luvussa.

---

* Luettelon funktioita kutsutaan usein *alkeisfunktioiksi*. Alkeisfunktioiden joukkoon luetaan myös niin sanotut arkusfunktiot, joihin tutustutaan luvussa Käänteisfunktio.

ESIMERKKI 3

Määritä funktion $g(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ raja-arvo kohdassa 1.

Ratkaisu

Funktion $g(x)$ lauseke on kohdassa 1 ”muotoa $\dfrac{0}{0}$”. Lauseke pyritään saamaan supistettavaan muotoon laventamalla se erotusta $\sqrt{x+3}-2$ vastaavalla summalla $\sqrt{x+3}+2$ ja käyttämällä summan ja erotuksen tulon muistikaavaa:

$$g(x) = \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$$ Lavennetaan summalla $\sqrt{x+3}+2$.

$$= \frac{(\sqrt{x+3}+2)(\sqrt{x+3}-2)}{(\sqrt{x+3}+2)(x-1)}$$ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$= \frac{(x+3)-4}{(\sqrt{x+3}+2)(x-1)}$$

$$= \frac{\cancel{x-1}^{\,1}}{(\sqrt{x+3}+2)\cancel{(x-1)}_{\,1}}$$ Supistetaan.

$$= \frac{1}{\sqrt{x+3}+2}$$ Raja-arvo on funktion arvo kohdassa 1.

$$\to \frac{1}{\sqrt{1+3}+2} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}, \text{ kun } x \to 1.$$

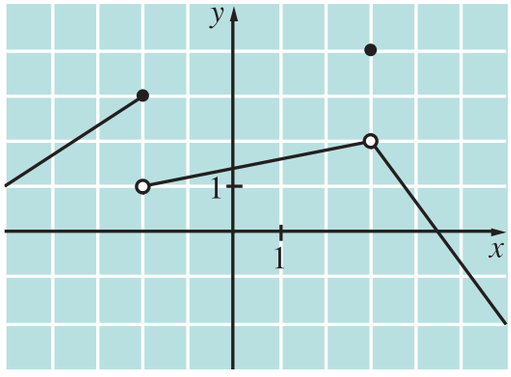
Vastaus

$\dfrac{1}{4}$ *

---

* Tulos voidaan tarkistaa graafisella laskimella piirretystä funktion $\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ kuvaajasta.

Ongelma



Kuviossa on erään funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kuvaaja.

a) Mitä arvoa funktion f arvot lähenevät, kun muuttujan arvot lähenevät kohtaa -2 vasemmalta? Entä silloin, kun muuttujan arvot lähenevät kohtaa -2 oikealta? Onko funktiolla f raja-arvo kohdassa -2?

b) Mitä arvoa funktion f arvot lähenevät, kun muuttujan arvot lähenevät kohtaa 3 ensin vasemmalta ja sitten oikealta? Onko funktiolla f raja-arvo kohdassa 3?

Toispuoliset raja-arvot

Funktiolla f on kohdassa a *vasemmanpuoleinen raja-arvo* b, jos muuttujan arvojen lähestyessä vasemmalta arvoa a funktion f arvot lähestyvät lukua b. Tällöin merkitään

$$\lim_{x \to a-} f(x) = b \quad \text{eli} \quad f(x) \to b, \text{ kun } x \to a-.$$

Vastaavasti määritellään *oikeanpuoleinen raja-arvo* ja merkitään

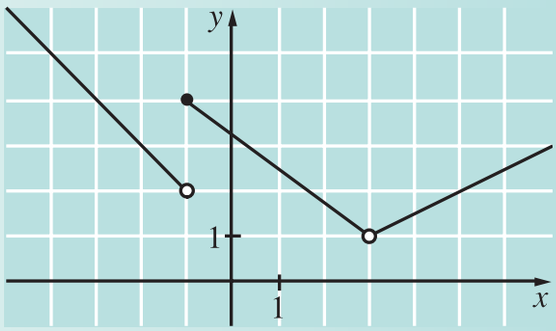
$$\lim_{x \to a+} f(x) = b \quad \text{eli} \quad f(x) \to b, \text{ kun } x \to a+.$$

Vasemman- ja oikeanpuoleinen raja-arvo ovat *toispuolisia raja-arvoja*.

Seuraava havainto on ilmeinen.

Toispuolisten raja-arvojen ja raja-arvon yhteys

Oletetaan, että funktio f on määritelty kohdan a molemmilla puolilla. Funktiolla f on raja-arvo kohdassa a, jos ja vain jos sillä on kohdassa a sekä vasemmanpuoleinen että oikeanpuoleinen raja-arvo ja nämä toispuoliset raja-arvot ovat yhtä suuret.



Kuvion funktion $f: \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}$ toispuoliset raja-arvot kohdassa -1 ovat $\lim\limits_{x \to -1-} f(x) = 2$ ja $\lim\limits_{x \to -1+} f(x) = 4$.

Funktiolla f ei ole raja-arvoa kohdassa -1.

Kohdassa 3 on $\lim\limits_{x \to 3-} f(x) = 1$ ja $\lim\limits_{x \to 3+} f(x) = 1$.

Funktiolla f on kohdassa 3 raja-arvo 1.

ESIMERKKI 4

Määritä funktion $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2, \text{ kun } x < 2 \\ -x + 6, \text{ kun } x > 2, \end{cases}$$

raja-arvo kohdassa 2. Piirrä funktion f kuvaaja.

Ratkaisu

Funktiolla f on kohdassa 2 raja-arvo, jos ja vain jos funktion vasemman- ja oikeanpuoleiset raja-arvot kohdassa 2 ovat yhtä suuret.

Kohdan 2 vasemmalla puolella on $f(x) = 3x - 2$. Funktion f vasemmanpuoleinen raja-arvo kohdassa 2 on

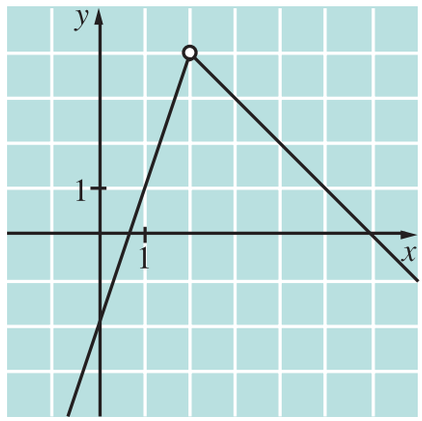
$$\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2-} (3x - 2) = 3 \cdot 2 - 2 = 4.$$

Kohdan 2 oikealla puolella on $f(x) = -x + 6$. Funktion f oikeanpuoleinen raja-arvo kohdassa 2 on

$$\lim_{x \to 2+} f(x) = \lim_{x \to 2+} (-x + 6) = -2 + 6 = 4.$$

Koska vasemman- ja oikeanpuoleiset raja-arvot ovat yhtä suuret, funktiolla f on kohdassa 2 raja-arvo 4.

Funktion f kuvaaja muodostuu kahdesta puolisuorasta.



Vastaus 4

ESIMERKKI 5

Onko funktiolla $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ g(x) = \dfrac{|x^2 - 5x|}{x}$,

raja-arvo kohdassa 0?

Ratkaisu Ilmaistaan funktio g paloittain määriteltynä funktiona ilman itseisarvomerkkejä.

Funktion $x^2 - 5x = x(x-5)$ nollakohdat ovat 0 ja 5. Funktion $x^2 - 5x$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

Siis

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 5x}{x}, & \text{kun } x < 0 \\ \dfrac{-x^2 + 5x}{x}, & \text{kun } 0 < x < 5 \\ \dfrac{x^2 - 5x}{x}, & \text{kun } x \geqslant 5. \end{cases}$$

Lausekkeet $\dfrac{x^2 - 5x}{x}$ ja $\dfrac{-x^2 + 5x}{x}$ supistuvat.

$$\frac{x^2 - 5x}{x} = \frac{\overset{1}{\cancel{x}}(x - 5)}{\underset{1}{\cancel{x}}} = x - 5$$

$$\frac{-x^2 + 5x}{x} = \frac{\overset{1}{\cancel{x}}(-x + 5)}{\underset{1}{\cancel{x}}} = -x + 5$$

Siis

$$g(x) = \begin{cases} x - 5, \text{ kun } x < 0 \\ -x + 5, \text{ kun } 0 < x < 5 \\ x - 5, \text{ kun } x \geqslant 5. \end{cases}$$

Kohdan 0 vasemmalla puolella on $g(x) = x - 5$, joten

$$\lim_{x \to 0-} g(x) = \lim_{x \to 0-} (x - 5) = 0 - 5 = -5.$$

Kohdan 0 oikealla puolella kohdan 0 läheisyydessä on $g(x) = -x + 5$, joten

$$\lim_{x \to 0+} g(x) = \lim_{x \to 0+} (-x + 5) = -0 + 5 = 5.$$

Koska funktion g vasemman- ja oikeanpuoleiset raja-arvot kohdassa 0 ovat eri suuret, funktiolla g ei ole raja-arvoa kohdassa 0.

Vastaus Ei ole.

TEHTÄVIÄ

SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

22. Määritä funktion $\dfrac{x^2-25}{x-5}$ raja-arvo kohdassa a) 4 b) 5.

23. Määritä.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-5x}{2x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-5}{2x}$

24. Määritä.

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x^2-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x-1}$

25. Määritä.

a) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$

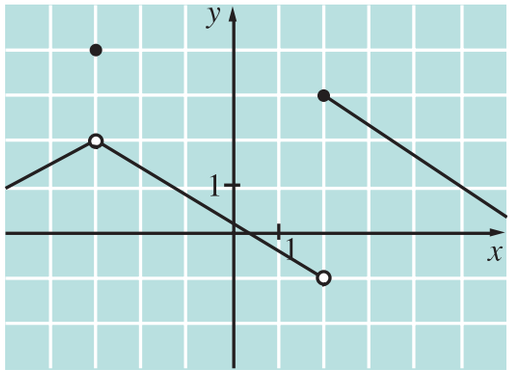
26. Olkoon $f(x)=\dfrac{4x^2+b}{x+3}$. Määritä sellainen vakion b arvo, että funktiolla f on raja-arvo kohdassa -3. Mikä raja-arvo tällöin on?

27. Määritä kuvaajasta.

a) $\lim\limits_{x\to -3-} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to -3+} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ d) $\lim\limits_{x\to 2-} f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to 2+} f(x)$ f) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$



28. Onko funktiolla f raja-arvo kohdassa -1? Jos raja-arvo on olemassa, niin mikä se on?

a) $f(x)=\begin{cases} x+3, \text{ kun } x<-1 \\ 2x+5, \text{ kun } x>-1 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} 3x+4, \text{ kun } x<-1 \\ x^2 \quad , \text{ kun } x>-1 \end{cases}$

29. Olkoon

$$f(x)=\begin{cases} 5-ax, \text{ kun } x<-1 \\ a^2+x, \text{ kun } x>-1. \end{cases}$$

Mikä on funktion f
a) vasemmanpuoleinen raja-arvo kohdassa -1
b) oikeanpuoleinen raja-arvo kohdassa -1?
c) Määritä sellainen vakion a arvo, että funktiolla f on raja-arvo kohdassa -1. Mikä raja-arvo tällöin on?

30. Onko funktiolla raja-arvo kohdassa 0? Jos on, niin mikä raja-arvo on?

a) $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{|x|}{x}$

b) $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2}{|x|}$

c) $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2-3|x|}{x}$

31. Olkoon I pituudeltaan l:n mittainen jana tasossa ja $t>0$. Mikä on sen tasojoukon pinta-ala $A(t)$, jonka pisteiden etäisyys I:stä on pienempi kuin t? Piirrä kuvio. Määritä $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{A(t)}{t}$.

(Ylioppilaskoe, k. 1997)

32. Määritä.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{e^x - 1}$ b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos^2 x}{\sin x - 1}$

33. Funktiosta f tiedetään, että $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -1$ ja $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 5$. Määritä

a) $\lim\limits_{x \to 0} f(-x)$ b) $\lim\limits_{h \to 0} f(3 + h)$

c) $\lim\limits_{h \to 0} (f(h) + f(3 - h))$

d) $\lim\limits_{x \to 3} f(x - 3)$ e) $\lim\limits_{t \to -2} f(1 - t)$.

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

34. Määritä.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2 - 3x}{6x}$ b) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 2x}$

35. Mikä funktion $f(x) = (\dfrac{1}{x^2} - 1) : (x - 1)$ määrittelyjoukko on? Määritä funktion f raja-arvo kohdassa 1.

36. Määritä sellainen vakion a arvo, että funktiolla $f(x) = \dfrac{ax^2 + 1}{2x - 1}$ on raja-arvo kohdassa $\dfrac{1}{2}$. Mikä raja-arvo tällöin on?

37. Määritä.

a) $\lim\limits_{x \to 25} \dfrac{3x - 75}{\sqrt{x} - 5}$ b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt{2x + 11} - 3}{x + 1}$

38. Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} 3x - x^2, \text{ kun } x < 2 \\ x - 1, \text{ kun } x \geqslant 2. \end{cases}$$

Määritä funktion f

a) vasemmanpuoleinen raja-arvo kohdassa 2

b) oikeanpuoleinen raja-arvo kohdassa 2.

c) Onko funktiolla f raja-arvo kohdassa 2?

39. Määritä vakiot a ja b niin, että funktiolla

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, \text{ kun } x < -2 \\ ax^3 + bx, \text{ kun } x > -2 \end{cases}$$

on kohdassa -2 raja-arvo 1.

40. Määritä vakiot a ja b niin, että funktiolla

$$f(x) = \begin{cases} ax - 2, \text{ kun } x < 3 \\ \dfrac{2x^2 + b}{x - 3}, \text{ kun } x > 3 \end{cases}$$

on raja-arvo kohdassa 3. Mikä tämä raja-arvo on?

41. Sievennä lauseke

$$f(x) = \frac{|1 + x| + |3 + x| + x}{x(|x| - 2)}, \text{ kun } -3 < x < -1,$$

sekä määritä $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$.

(Ylioppilaskoe, s. 1983)

42. Määritä $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x^2 - 1| - 1}{|x|}$.

(Ylioppilaskoe, s. 1982)

43. Oletetaan, että funktiolla f on kohdassa 0 molemmat toispuoliset raja-arvot. Merkitään $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = c$ ja $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = d$. Määritä

a) $\lim\limits_{x \to 0+} f(-x)$ b) $\lim\limits_{x \to 0} f(|x|)$

c) $\lim\limits_{x \to -1-} f(x^2 - 1)$ d) $\lim\limits_{x \to 0} f(\cos x - 1)$.

44. Määritä.

a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\tan^2 x - 1}{\sin x - \cos x}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan^2 x - \sin^2 x}{\cos x - 1}$

45. Funktiolle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pätee kaikilla muuttujan x arvoilla $f(-x) = -f(x)$. Osoita, että

a) $f(0) = 0$

b) jos $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ on olemassa, niin

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0.$

c) Anna esimerkki sellaisesta ehdon $f(-x) = -f(x)$ täyttävästä funktiosta $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolla on raja-arvo kohdassa 0, ja sellaisesta, jolla ei ole raja-arvoa kohdassa 0.

46. Oletetaan, että funktiolla $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ on ominaisuus: $f(x)f(-x) = -1$ kaikilla $x \neq 0$. Osoita, että funktiolla f ei ole raja-arvoa kohdassa 0. Anna esimerkki tällaisesta funktiosta.

47. Raja-arvon määritelmässä vaaditaan funktion f raja-arvolta b kohdassa a, että ”tulemalla tarpeeksi lähelle lukua a saadaan funktion f arvot niin lähelle lukua b, kuin suinkin halutaan”.

Funktion $f(x) = \dfrac{2x^2 - 18}{x - 3}$ raja-arvo kohdassa 3 on 12. Tutki, kuinka lähelle lukua 3 tulemalla saadaan funktion f arvojen etäisyys luvusta 12 pienemmäksi kuin $0{,}01$. Koska kahden luvun etäisyys lukusuoralla on niiden erotuksen itseisarvo, on siis määritettävä jokin sellainen positiivinen luku δ, että

$|f(x) - 12| < 0{,}01$, kun $0 < |x - 3| < \delta$.

48. Funktion $f(x) = \dfrac{5x^2 + 3x}{x}$ raja-arvo kohdassa 0 on 3. Määritä jokin sellainen positiivinen luku δ, että

a) $|f(x) - 3| < 0{,}1$, kun $0 < |x| < \delta$

b) $|f(x) - 3| < 0{,}001$, kun $0 < |x| < \delta$

c) $|f(x) - 3| < \varepsilon$, kun $0 < |x| < \delta$ (oletetaan, että $\varepsilon > 0$).

49. Funktion raja-arvo määritellään nykyisin yleensä seuraavasti:

Funktion f raja-arvo kohdassa a on b, jos jokaiselle luvulle $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen luku $\delta > 0$, että

$|f(x) - b| < \varepsilon$, kun $0 < |x - a| < \delta$.

Siis: Olipa ε mikä tahansa positiivinen luku, niin löytyy sellainen luku δ, että kun muuttujan arvojen etäisyys luvusta a on pienempi kuin δ mutta suurempi kuin nolla, niin funktion f arvojen etäisyys luvusta b on pienempi kuin ε.
Kirjain ε on kreikan aakkosten *epsilon*. Määritelmää kutsutaan usein epsilon-delta-määritelmäksi.
Osoita määritelmän mukaisesti, että

a) $\lim\limits_{x \to 2} 5x = 10$ b) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{3x^2 - 75}{x - 5} = 30.$

Funktion jatkuvuus

KERTAUSESIMERKKI 1

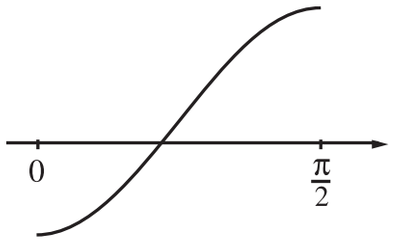
Osoita, että funktiolla $f(x) = x - \cos x$ on ainakin yksi nollakohta välillä $]0, \frac{\pi}{2}[$.

Ratkaisu

Lasketaan funktion f arvot välin $]0, \frac{\pi}{2}[$ päätepisteissä.

$f(0) = 0 - \cos 0 = 0 - 1 = -1$

$f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$



Koska funktion f arvot välin päätepisteissä ovat erimerkkiset ja funktio f on jatkuva välillä $[0, \frac{\pi}{2}]$, niin funktiolla f on ainakin yksi nollakohta välillä $]0, \frac{\pi}{2}[$.

Jatkuvuuden havainnollinen kuvailu on: kuvaaja ei katkea. Jatkuvuus määritellään täsmällisesti raja-arvon avulla.

Jatkuvuuden määritelmä

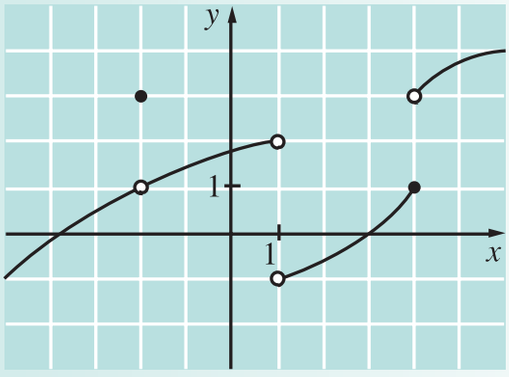
Oletetaan, että funktio f on määritelty jollain välillä, joka sisältää kohdan a. Funktio f on *jatkuva kohdassa* a (pisteessä a), jos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Funktio f on *jatkuva joukossa* A, jos se on jatkuva jokaisessa joukon A pisteessä. Jos funktio f on jatkuva koko reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$, niin sanotaan, että funktio f on *kaikkialla jatkuva*.

Jos funktio f ei ole jatkuva määrittelyjoukkonsa kohdassa a, niin kohta a on funktion f *epäjatkuvuuskohta*. Epäjatkuvuuskohdassa a joko raja-arvo $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ei ole olemassa tai raja-arvo on eri suuri kuin funktion arvo $f(a)$.

Epäjatkuvuuskohtia voivat siis olla vain sellaiset kohdat, joissa funktio on määritelty. Kohdat, joissa funktio ei ole määritelty, eivät ole funktion epäjatkuvuuskohtia.

Kuviossa on funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ kuvaaja. Funktiolla f on epäjatkuvuuskohdat -2 ja 4. Kohta 1 ei ole funktion f epäjatkuvuuskohta, sillä kohta ei kuulu funktion f määrittelyjoukkoon.



ESIMERKKI 2

Funktio $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on määritelty yhtälöllä $f(x) = \dfrac{2x^2 - 18}{x - 3}$ silloin, kun $x \neq 3$. Määrittele funktion arvo $f(3)$ niin, että funktio f on kaikkialla jatkuva.

Ratkaisu

Koska rationaalifunktio on jatkuva koko määrittelyjoukossaan, funktio f on jatkuva jokaisessa kohdassa $x \neq 3$.

Funktio f on jatkuva kohdassa 3, jos ja vain jos $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$.

Koska

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{2x^2 - 18}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{2(x^2 - 9)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{2(x + 3)\cancel{(x - 3)}^{\,1}}{\cancel{x - 3}_{\,1}}$$

$$= \lim_{x \to 3} 2(x + 3) = 2(3 + 3) = 12,$$

on määriteltävä $f(3) = 12$.

Vastaus

$f(3) = 12$

ESIMERKKI 3

Funktiolla $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on ominaisuus:
$f(a+b) = f(a) + f(b)$ kaikilla a ja b.
a) Määritä $f(0)$.
b) Osoita, että jos funktio f on jatkuva kohdassa 0, niin se on jatkuva kaikkialla.
c) Anna esimerkki ehdon $f(a+b) = f(a) + f(b)$ täyttävästä funktiosta.

Ratkaisu

a) Koska $f(a+b) = f(a) + f(b)$ kaikilla a ja b, niin

$$f(0+0) = f(0) + f(0)$$

$$f(0) = 2f(0) \qquad \big| -f(0)$$

$$0 = f(0).$$

Siis $f(0) = 0$.

b) Koska funktio f on jatkuva kohdassa 0 ja $f(0) = 0$,
niin $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

On osoitettava, että kaikilla a on $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Merkitään $h = x - a$, jolloin $x = a + h$. Kun $x \to a$, niin $h \to 0$.

Siis

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{h \to 0} f(a+h) \qquad f(a+b) = f(a) + f(b)$$

$$= \lim_{h \to 0} (f(a) + f(h))$$

$$= \lim_{h \to 0} f(a) + \lim_{h \to 0} f(h) = f(a) + 0 = f(a).$$

Siis funktio f on jatkuva jokaisessa kohdassa a.

c) Ehdon $f(a+b)=f(a)+f(b)$ täyttää esimerkiksi funktio $f(x)=3x$, sillä

$f(a+b)=3(a+b)=3a+3b=f(a)+f(b)$.*

Vastaus a) $f(0)=0$ c) $f(x)=3x$

Toispuolinen jatkuvuus

Funktio f on *oikeanpuoleisesti jatkuva* kohdassa a, jos $\lim\limits_{x \to a+} f(x)=f(a)$.

Funktio f on *vasemmanpuoleisesti jatkuva* kohdassa a, jos $\lim\limits_{x \to a-} f(x)=f(a)$.

Funktio f on jatkuva kohdassa a, jos ja vain jos se on sekä oikean- että vasemmanpuoleisesti jatkuva kohdassa a.

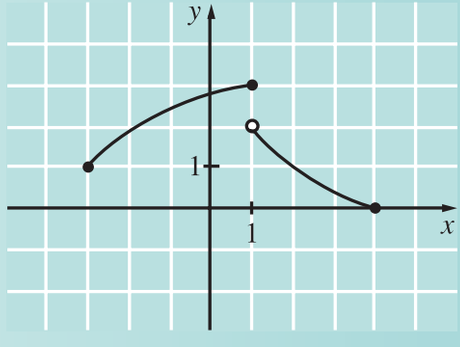
Jatkuvuus suljetulla välillä

Funktio f on jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$, jos se on jatkuva välillä $]a, b[$ ja sen lisäksi oikeanpuoleisesti jatkuva päätepisteessä a ja vasemmanpuoleisesti jatkuva päätepisteessä b.

Vastaavasti määritellään jatkuvuus väleillä $[a, b[$, $[a, \infty[$, $]a, b]$ ja $]-\infty, b]$ vaatimalla, että funktio on toispuolisesti jatkuva väliin sisältyvässä päätepisteessä.

Kuvion funktio f on jatkuva välillä $[-3, 1]$. Funktio on epäjatkuva välillä $[1, 4]$, sillä $\lim\limits_{x \to 1+} f(x)=2$ ja $f(1)=3$.

Neliöjuurifunktio $\sqrt{x}$ on jatkuva koko määrittelyjoukossaan $[0, \infty[$.



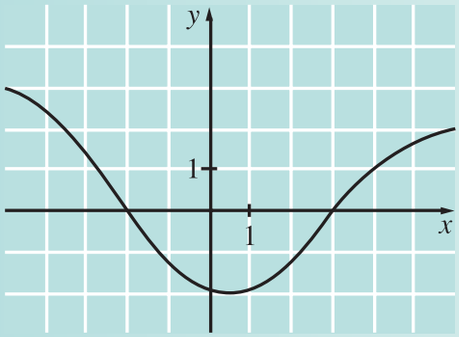
* Ehdon täyttää mikä tahansa funktio $f(x)=kx$.

Tavallisten funktioiden (alkeisfunktioiden) jatkuvuutta ei tässä kurssissa pyritä täsmällisesti perustelemaan. Kyseessä on laaja ja vaativa tehtävä, joka perustuu muun muassa seuraavaan jatkuvien funktioiden ominaisuuteen.

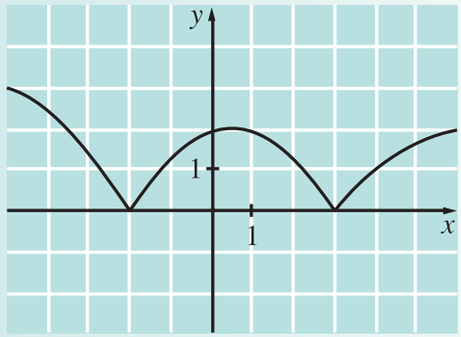
Jatkuvuuden säilyminen funktiotoimituksissa

Kahden jatkuvan funktion summa, erotus, tulo, osamäärä ja yhdistetty funktio ovat jatkuvia koko määrittelyjoukossaan. Jos jatkuvalla funktiolla on käänteisfunktio, myös se on jatkuva.

Jatkuvuuden havainnollisen kuvailun (kuvaaja ei katkea) perusteella näyttää ilmeiseltä (ei todisteta), että jatkuvan funktion itseisarvo on myös jatkuva.



funktion f kuvaaja



funktion $|f|$ kuvaaja

ESIMERKKI 4

Onko funktio

$$f(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{\pi x}{4}, \text{ kun } x < 4 \\ \sqrt{x} - 3, \text{ kun } x \geqslant 4 \end{cases}$$

kaikkialla jatkuva?

Ratkaisu

Funktion f määrittelyjoukko on koko reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$.

Kun $x \neq 4$, niin funktio on jatkuva, sillä funktiot $\cos\dfrac{\pi x}{4}$ ja $\sqrt{x} - 3$ ovat jatkuvia koko määrittelyjoukoissaan.

Tutkitaan jatkuvuutta kohdassa 4.

Funktion f arvo kohdassa 4 on $f(4) = \sqrt{4} - 3 = 2 - 3 = -1$.

Koska funktio $\sqrt{x} - 3$ on jatkuva koko määrittelyjoukossaan, funktio f on oikeanpuoleisesti jatkuva kohdassa 4.

Tutkitaan vasemmanpuoleista jatkuvuutta kohdassa 4.

$$\lim_{x \to 4-} f(x) = \lim_{x \to 4-} \cos\frac{\pi x}{4} = \cos\frac{\pi \cdot 4}{4} = \cos\pi = -1$$

Koska $\lim\limits_{x \to 4-} f(x) = f(4)$, funktio f on vasemmanpuoleisesti jatkuva kohdassa 4.

Koska funktio f on vasemman- ja oikeanpuoleisesti jatkuva kohdassa 4, funktio f on jatkuva kohdassa 4.

Funktio f on siis kaikkialla jatkuva.

Vastaus

On.

Jo aikaisemmissa kursseissa on löydetty funktioiden nollakohtia käyttämällä hyväksi seuraavaa jatkuvien funktioiden ominaisuutta.

Bolzanon* lause. Jos funktio f on jatkuva välillä $[a, b]$ ja funktion f päätepistearvot $f(a)$ ja $f(b)$ ovat erimerkkiset, niin funktiolla f on välillä $]a, b[$ (ainakin yksi) nollakohta.

Bolzanon lause perustuu lukusuoran syvällisempiin ominaisuuksiin, ja sen todistus ylittää syventävänkin lukiokurssin mahdollisuudet.

Bolzanon lauseen avulla voidaan todistaa:

Jatkuvan funktion väliarvolause. Jos funktio f on jatkuva välillä $[a, b]$, niin funktio f saa välillä $]a, b[$ jokaisen arvon päätepistearvojen $f(a)$ ja $f(b)$ välistä.

Jatkuvan funktion väliarvolauseen todistaminen on tehtävänä 74.

ESIMERKKI 5

Funktiot f ja g ovat määriteltyjä ja jatkuvia välillä $[1, 5]$. Funktioiden f ja g arvot välin päätepisteissä ovat $f(1) = 6$, $f(5) = 2$, $g(1) = 0$ ja $g(5) = 4$. Osoita, että välillä $]1, 5[$ on ainakin yksi sellainen kohta x, jossa funktioiden arvot ovat yhtä suuret eli $f(x) = g(x)$.

Ratkaisu

Tutkitaan erotusfunktiota h, jolle $h(x) = f(x) - g(x)$. Koska funktiot f ja g ovat jatkuvia välillä $[1, 5]$, myös erotusfunktio h on jatkuva välillä $[1, 5]$.

Lasketaan funktion h arvot välin päätepisteissä.

---

* Bernhard Bolzano (1781–1848), tšekkiläinen teologi ja matemaatikko. Bolzano teki perustavia, aikaansa edellä olevia oivalluksia lukusuoran ominaisuuksista ja jatkuvista funktioista. Monet hänen tuloksistaan ymmärrettiin vasta vuosikymmeniä myöhemmin.

$h(1) = f(1) - g(1) = 6 - 0 = 6$

$h(5) = f(5) - g(5) = 2 - 4 = -2$

Koska funktion h arvot välin $[1, 5]$ päätepisteissä ovat erimerkkiset, funktiolla h on välillä $]1, 5[$ ainakin yksi nollakohta. Välillä $]1, 5[$ on siis sellainen kohta x, jossa

$f(x) - g(x) = 0$

eli

$f(x) = g(x)$.* □

Seuraava lause ilmaisee toisen tärkeän jatkuvien funktioiden ominaisuuden.

Suurimman ja pienimmän arvon olemassaololause. Jos funktio f on jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$, niin se saa tällä välillä sekä suurimman arvon että pienimmän arvon.

Tämänkin lauseen todistus ylittää koulukurssin mahdollisuudet.

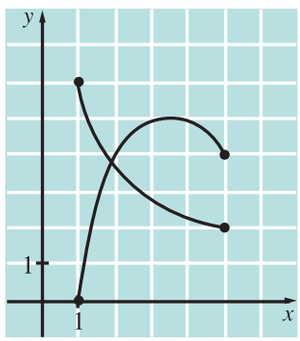
Lauseen molemmat oletukset,

- tutkittava väli on suljettu väli $[a, b]$ eikä esimerkiksi muotoa $]a, b]$ tai $[a, \infty[$ oleva väli
- funktio f on jatkuva välillä $[a, b]$,

ovat tarpeen, jotta sekä suurimman että pienimmän arvon olemassaolosta olisi varmuus.

---

* Kuvio havainnollistaa esimerkin tilannetta. Pisteitä $(1, 6)$ ja $(5, 2)$ yhdistävän jatkuvan funktion kuvaajan on pakko leikata pisteitä $(1, 0)$ ja $(5, 4)$ yhdistävä jatkuvan funktion kuvaaja.



ESIMERKKI 6

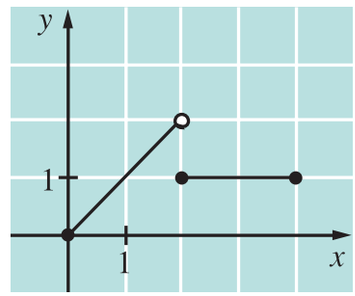
Anna esimerkki funktiosta $f\colon [0, 4] \to \mathbb{R}$, jolla ei ole välillä $[0, 4]$ suurinta arvoa. Piirrä funktion f kuvaaja.

Ratkaisu

Koska jatkuva funktio saa suljetulla välillä sekä suurimman että pienimmän arvon, esimerkkifunktio ei voi olla jatkuva välillä $[0, 4]$.

Vaaditun ehdon täyttää esimerkiksi funktio*

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ kun } 0 \leqslant x < 2 \\ 1, \text{ kun } 2 \leqslant x \leqslant 4. \end{cases}$$



* Esimerkkifunktio kannattaa laatia niin, että ensin muodostetaan yksinkertaisista osista (janoista ja pisteistä) koostuva vaaditun ehdon täyttävä kuvaaja ja sitten funktion lauseke. Janat kannattaa piirtää niin, että niiden kulmakertoimet voi lukea kuviosta.

TEHTÄVIÄ

SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

50. Osoita käyttämällä jatkuvuuden määritelmää, että

a) funktio

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & \text{kun } x \neq 1 \\ 2, & \text{kun } x = 1 \end{cases}$$

on jatkuva kohdassa 1

b) funktio

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & \text{kun } x \neq 1 \\ 4, & \text{kun } x = 1 \end{cases}$$

on epäjatkuva kohdassa 1.

51. Onko funktiolla epäjatkuvuuskohtia?

a) funktio $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, jolle $f(x) = \dfrac{1}{x}$

b) funktio $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolle

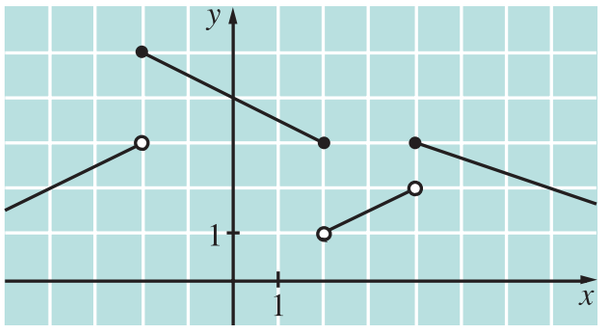
$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{kun } x \neq 0 \\ 4, & \text{kun } x = 0 \end{cases}$$

52. On määritelty $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x + 4}$, kun $x \neq -4$.

Määrittele $f(-4)$ niin, että saadaan kaikkialla jatkuva funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

53. Kuviossa on erään funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kuvaaja, joka muodostuu kahdesta puolisuorasta ja kahdesta janasta. Onko funktio f

a) vasemmanpuoleisesti jatkuva kohdassa -2
b) oikeanpuoleisesti jatkuva kohdassa -2
c) jatkuva välillä $[-2, 2]$
d) jatkuva välillä $]2, 4[$
e) jatkuva välillä $]2, 4]$
f) jatkuva välillä $[4, \infty[$?



54. Onko funktiolla epäjatkuvuuskohtia?

a)

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & \text{kun } x < 2 \\ x + 5, & \text{kun } x > 2 \end{cases}$$

b)

$$g(x) = \begin{cases} 3x - 1, & \text{kun } x \leqslant 2 \\ x + 5, & \text{kun } x > 2 \end{cases}$$

c)

$$h(x) = \begin{cases} 3x - 1, & \text{kun } x \leqslant 2 \\ x + 3, & \text{kun } x > 2 \end{cases}$$

55. Määritä vakiot a ja b niin, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x^2, & \text{kun } x \leqslant -1 \\ ax + b, & \text{kun } -1 < x < 3 \\ x - 3, & \text{kun } x \geqslant 3 \end{cases}$$

on kaikkialla jatkuva. Piirrä kuvaaja.

56. Anna esimerkki kasvavasta funktiosta $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolla on kaksi epäjatkuvuuskohtaa. Perustele epäjatkuvuus. Piirrä funktion kuvaaja.

57. Osoita, että yhtälöllä $\frac{5}{x} = \pi + x^2$ on ainakin yksi juuri välillä $]1; 1{,}2[$.

58. Anna esimerkki aidosti kasvavasta funktiosta $f: [0, 4] \to \mathbb{R}$, joka saa arvot $f(0) = -2$, $f(4) = 2$ ja jolla ei ole yhtään nollakohtaa välillä $]0, 4[$. Piirrä kuvaaja.

59. Anna esimerkki suljetulla välillä $[0, 1]$ määritellystä funktiosta f, jolla ei ole suurinta eikä pienintä arvoa. Piirrä funktion kuvaaja. Voiko tällainen funktio olla kasvava?
(Ylioppilaskoe, s. 1998)

60. Jatkuvan funktion f suurin arvo välillä $[-3, 5]$ on 4 ja pienin arvo -7.
a) Osoita, että funktio $|f|$ saa jossain välin $]-3, 5[$ pisteessä arvon 6.
b) Mikä on funktion $|f|$ suurin ja pienin arvo välillä $[-3, 5]$?

61. Funktio $f: [1, 5] \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja $f(1) = 6$ ja $f(5) = 2$. Osoita, että funktiolla f on välillä $[1, 5]$ ainakin yksi kiintopiste eli sellainen piste x, että $f(x) = x$. Havainnollista tulosta piirtämällä koordinaatistoon ehdot täyttävän funktion f kuvaaja ja suora $y = x$.

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

62. On määritelty $f(x) = \frac{x^2 - 6x}{x - 3}$, kun $x \neq 3$. Voidaanko määritellä $f(3)$ niin, että saadaan kaikkialla jatkuva funktio $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

63. On määritelty $f(x) = \frac{x^2 + x - 12}{x - 3}$, kun $x \neq 3$. Määrittele $f(3)$ niin, että saadaan kaikkialla jatkuva funktio $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. (Ohje: Osoittaja voidaan jakaa tekijöihin määrittämällä ensin sen nollakohdat.)

64. Muotoa $\frac{x^2 + ax + 4}{x - 1}$ oleva lauseke määrittelee jatkuvan funktion f muuttujan arvoilla $x \neq 1$. Kuinka vakio a on valittava, jotta funktio f voitaisiin saada jatkuvaksi myös pisteessä 1? Mikä tällöin tulee määritellä arvoksi $f(1)$?

65. Onko funktio $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -2e^x & , \text{kun } x \leqslant 0 \\ \dfrac{3x^2 - 12x}{6x} & , \text{kun } x > 0, \end{cases}$$

kaikkialla jatkuva?

66. Määritä vakiot a ja b niin, että funktio $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2 + a}{x - 1} & , \text{kun } x < 1 \\ x + b & , \text{kun } x \geqslant 1, \end{cases}$$

on jatkuva kohdassa 1.

67. Osoita, että jos a on mikä tahansa reaaliluku, niin kolmannen asteen yhtälöllä $2x^3 + ax^2 + a^2x + 1 = 0$ on ainakin yksi juuri välillä $]-1, 0[$.

68. Anna esimerkki funktiosta $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$, jolla on pienin arvo, mutta ei suurinta arvoa. Piirrä funktion kuvaaja.

69. Anna esimerkki jatkuvasta funktiosta $f:]0, 2[\to \mathbb{R}$, jolla
a) ei ole suurinta eikä pienintä arvoa
b) on suurin arvo, mutta ei pienintä arvoa.
Piirrä kuvaaja.

70. Funktiolla $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joka ei ole vakiofunktio 0, on ominaisuus:
$f(a + b) = f(a)f(b)$ kaikilla a ja b.
a) Määritä $f(0)$.
b) Osoita, että jos funktio f on jatkuva kohdassa 0, niin se on jatkuva kaikkialla.
c) Anna esimerkki ominaisuuden omaavasta funktiosta.

71. Funktio $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jaksollinen, jaksona $\omega \neq 0$, jos $f(x + \omega) = f(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Anna esimerkki jatkuvasta jaksollisesta funktiosta ja epäjatkuvasta jaksollisesta funktiosta. Onko derivoituvan jaksollisen funktion derivaatta aina jaksollinen? Osoita, että jatkuva jaksollinen funktio saa suurimman arvonsa.
(Ylioppilaskoe, k. 1999)

72. Funktio $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja funktion f arvojoukko sisältyy väliin $[0, 1]$. Osoita, että funktiolla f on välillä $[0, 1]$ ainakin yksi kiintopiste eli sellainen piste x, että $f(x) = x$.

73. Funktiolle $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pätee $f(x)f(-x) < 0$ kaikilla $x \neq 0$. Olkoon $f(0) = a$. Osoita, että jos funktio f on jatkuva origossa, niin $a = 0$.

74. Todista Bolzanon lauseen avulla jatkuvan funktion väliarvolause: Jos funktio f on jatkuva välillä $[a, b]$, niin funktio f saa välillä $]a, b[$ jokaisen arvon päätepistearvojen $f(a)$ ja $f(b)$ välistä.

75. Funktiolle $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pätee kaikilla muuttujan x arvoilla $|f(x)| \leqslant |x|$.
a) Piirrä koordinaatistoon suorat $y = x$ ja $y = -x$. Missä funktion f kuvaaja kulkee?
b) Osoita, että funktio f on jatkuva kohdassa 0.

76. Tutustu funktioon $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{kun } x \neq 0 \\ 0, & \text{kun } x = 0, \end{cases}$$

kohdan 0 läheisyydessä arvoja laskemalla ja tutkimalla kuvaajaa graafisen laskimen avulla. Onko funktio f jatkuva kohdassa 0? Perustele.

77. Onko funktio $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \text{ on rationaaliluku} \\ x, & \text{kun } x \text{ on irrationaaliluku,} \end{cases}$$

jatkuva origossa? Perustele.

78. Kari lähti polkupyörällä kotoa mökille perjantaina kello 16.00 ja oli perillä kello 18.00. Sunnuntaina hän pyöräili saman reitin toiseen suuntaan niin, että hän lähti jälleen kello 16.00 ja oli perillä taas kello 18.00. Osoita, että mökkireitin varrella on jokin kohta, jossa hän oli perjantaina ja sunnuntaina täsmälleen samaan kellonaikaan.

79. Juoksijan aika 10 000 metrin juoksussa oli tasan 30 minuuttia. Osoita, että hän juoksun jossain vaiheessa juoksi kilometrin matkan tasan kolmessa minuutissa.

Derivaatta

KERTAUSESIMERKKI 1

Määritä funktion $f(x) = \cos 2x$ kuvaajalle pisteeseen $(\frac{\pi}{4}, 0)$ piirretyn tangentin kulmakerroin.

Ratkaisu

Tangentin kulmakerroin on funktion f derivaatta kohdassa $\frac{\pi}{4}$.

Derivoidaan funktio f.

$f'(x) = -\sin 2x \cdot 2$ $\qquad$ D $\cos f(x) = -\sin f(x) \cdot f'(x)$

$= -2 \sin 2x$

Sijoitetaan muuttujan arvo $x = \frac{\pi}{4}$.

$$f'(\tfrac{\pi}{4}) = -2 \sin (2 \cdot \tfrac{\pi}{4}) = -2 \sin \tfrac{\pi}{2} = -2 \cdot 1 = -2$$

Tangentin kulmakerroin on -2.

Vastaus -2

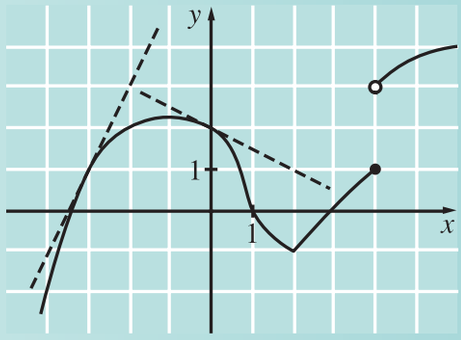
Derivaatan kuvaileva määritelmä. Funktio f on *derivoituva kohdassa* a, jos funktion f kuvaajalle voidaan piirtää muuttujan arvon a kohdalle yksikäsitteinen tangentti, joka ei ole pystysuora. Funktion f *derivaatta* $f'(a)$ kohdassa a on tangentin kulmakerroin.

Funktio f on *derivoituva joukossa* A, jos se on derivoituva jokaisessa joukon A pisteessä.

Funktio f', jonka arvo jokaisessa kohdassa x, jossa funktio f on derivoituva, on derivaatta $f'(x)$, on funktion f *derivaattafunktio*. Derivaattafunktion määrittämistä kutsutaan *derivoimiseksi*. Funktion derivoimista merkitään $\mathrm{D}f$.*

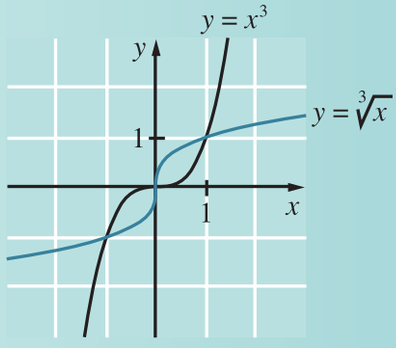
Derivaatta $f'(a)$ ilmaisee funktion f arvojen kasvunopeuden kohdassa a.

Kuvion funktion f derivaatta kohdassa -3 näyttää olevan noin 2 eli $f'(-3) \approx 2$. Edelleen on $f'(-1) \approx 0$ ja $f'(0) \approx -0{,}5$.



Funktio f ei ole derivoituva kohdassa 2 (kärki) eikä kohdassa 4 (epäjatkuvuuskohta).

Kuutiojuurifunktio $\sqrt[3]{x}$ on funktion x^3 käänteisfunktio, joten kuutiojuurifunktion kuvaaja on funktion x^3 kuvaajan peilikuva suoran $y = x$ suhteen. Koska funktion x^3 kuvaajalle origoon piirretty tangentti on vaakasuora ($\mathrm{D}x^3 = 3x^2$ ja $3 \cdot 0^2 = 0$), niin funktion $\sqrt[3]{x}$ kuvaajalle origoon piirretty tangentti on pystysuora. Funktio $\sqrt[3]{x}$ ei ole derivoituva kohdassa 0.



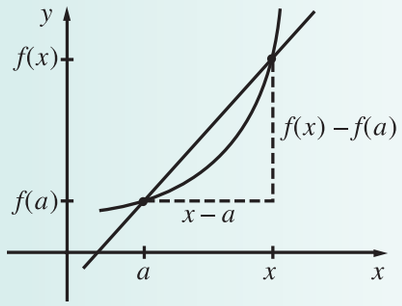
---

* Merkintöjen f' ja $\mathrm{D}f$ kanssa tulee olla tarkkana, sillä ne tarkoittavat joissain tilanteissa eri asiaa. Merkintä $f'(x)$ tarkoittaa funktion f derivaattafunktion f' arvoa kohdassa x (funktion f derivaattaa kohdassa x). Kirjain D taas on *derivointioperaattori*, jonka vaikutusalue on sitä seuraava funktio kokonaisuudessaan.
Esimerkki: Olkoon $f(x) = \sin x$. Tällöin $f'(x) = \cos x$ ja esimerkiksi $f'(x^2) = \cos x^2$ ja $f'(\pi) = -1$. Myös $\mathrm{D}f(x) = \mathrm{D}\sin x = \cos x$. Sen sijaan merkintä $\mathrm{D}f(x^2)$ tarkoittaa yhdistetyn funktion $f(x^2)$ derivoimista, eli $\mathrm{D}f(x^2) = \mathrm{D}\sin x^2 = \cos x^2 \cdot 2x = 2x \cos x^2$. Vastaavasti $\mathrm{D}f(\pi) = 0$, sillä $f(\pi)$ on vakio.

Derivaatta määritellään täsmällisesti erotusosamäärän raja-arvona.

Funktion f *erotusosamäärä* kohdassa a on $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Erotusosamäärä on sen suoran kulmakerroin, joka leikkaa funktion f kuvaajaa muuttujan arvon a ja toisen arvon x kohdalla.



Derivaatan määritelmä. Funktio f on *derivoituva kohdassa* a, jos erotusosamäärällä

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

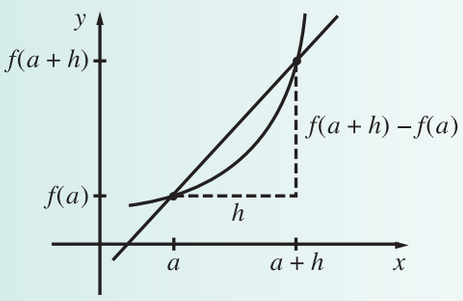
on raja-arvo kohdassa a. Raja-arvo on *funktion derivaatta kohdassa* a.

Siis

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Jos merkitään $x-a=h$, jolloin $x=a+h$, niin erotusosamäärä tulee muotoon

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$



Kun $x\to a$, niin $h\to 0$, joten käyttäen erotusosamäärän tätä muotoa saadaan

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

ESIMERKKI 2

Määritä funktion $f(x) = x^2$ derivaatta kohdassa 3 erotusosamäärän raja-arvona käyttäen erotusosamäärän muotoa

a) $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ b) $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Ratkaisu

a) Funktion $f(x) = x^2$ erotusosamäärä kohdassa $a = 3$ on

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{x^2 - 3^2}{x - 3}$$

ja derivaatta kohdassa 3 on

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 3^2}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x+3)\cancel{(x-3)}^{\,1}}{\cancel{x-3}_{\,1}} = \lim_{x \to 3} (x + 3) = 3 + 3 = 6.$$

b) Funktion $f(x) = x^2$ erotusosamäärä kohdassa $a = 3$ on

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h}$$

$$= \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} = \frac{6h + h^2}{h}$$

ja derivaatta kohdassa 3 on

$$\lim_{h \to 0} \frac{6h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (6 + h) = 6 + 0 = 6.$$

Vastaus

a) 6 b) 6

Derivoituvuus ja jatkuvuus

Lause. Jos funktio f on derivoituva kohdassa a, niin se on jatkuva kohdassa a.

Todistus. Oletetaan, että funktio f on derivoituva kohdassa a eli erotusosamäärällä kohdassa a on raja-arvo

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

On osoitettava, että $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Koska

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a),$$

Lauseke $f(x) - f(a)$ on lavennettu lausekkeella $x - a$.

niin

$$f(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) + f(a).$$

Saadaan:

$$f(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) + f(a)$$

Erotusosamäärän $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ raja-arvo on $f'(a)$.

$$\to f'(a) \cdot (a - a) + f(a)$$

$$= f'(a) \cdot 0 + f(a) = f(a), \text{ kun } x \to a.$$

Siis $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, joten funktio f on jatkuva kohdassa a. □

Edellä todistetun nojalla:

Funktio ei ole derivoituva epäjatkuvuuskohdissaan.

ESIMERKKI 3

Onko funktio

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, \text{ kun } x < 1 \\ 2x \quad\;\; , \text{ kun } x \geqslant 1 \end{cases}$$

derivoituva kohdassa 1? Piirrä funktion f kuvaaja.

Ratkaisu

Tutkitaan ensin, onko funktio f jatkuva kohdassa 1.

Kun $x \geqslant 1$, niin $f(x) = 2x$. Siis funktio f on oikeanpuoleisesti jatkuva kohdassa 1 ja $f(1) = 2 \cdot 1 = 2$.

Koska $\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1-} (x^2 + 1) = 1^2 + 1 = 2 = f(1)$,

funktio f on vasemmanpuoleisesti jatkuva kohdassa 1.

Funktio f on jatkuva kohdassa 1, joten derivoituvuuden esteenä ei ole funktion f epäjatkuvuus.*

Koska funktiolla f on eri lauseke kohdan $x = 1$ eri puolilla, on määritettävä erotusosamäärän toispuoliset raja-arvot (niin sanotut *toispuoliset derivaatat*) kohdassa 1.

---

* Jos olisi osoittautunut, että funktio f on epäjatkuva kohdassa 1, olisi voitu heti todeta, että f ei ole derivoituva kohdassa 1. Erotusosamäärää ei siis tarvitsisi enää tutkia. Jatkuvuutta ei kuitenkaan välttämättä tarvitse aluksi selvittää, sillä derivoitumattomuus tulee ilmi myös erotusosamäärää tutkittaessa.

$$\lim_{x \to 1-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \qquad \text{Kun } x < 1, \text{ niin } f(x) = x^2 + 1.$$

$$= \lim_{x \to 1-} \frac{(x^2 + 1) - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1-} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

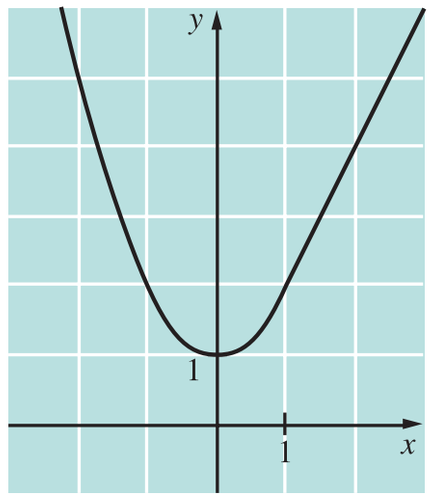
$$= \lim_{x \to 1-} (x + 1) = 1 + 1 = 2^*$$

$$\lim_{x \to 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \qquad \text{Kun } x > 1, \text{ niin } f(x) = 2x.$$

$$= \lim_{x \to 1+} \frac{2x - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1+} \frac{2(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1+} 2 = 2^{**}$$

Koska erotusosamäärällä on kohdassa 1 sekä oikeanpuoleinen että vasemmanpuoleinen raja-arvo ja nämä toispuoliset raja-arvot ovat yhtä suuret, funktio f on derivoituva kohdassa 1 ja $f'(1) = 2$.

Kuvio havainnollistaa, kuinka kuvaajat liittyvät sulavasti yhteen muuttujan arvon 1 kohdalla.



Vastaus On.

---

* Käyttäen erotusosamäärän h-muotoa olisi voitu määrittää

$$\lim_{h \to 0-} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{((1 + h)^2 + 1) - 2}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{2h + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0-} (2 + h) = 2.$$

** Tai $\lim_{h \to 0+} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{2(1 + h) - 2}{h} = \lim_{h \to 0+} 2 = 2.$

Funktion derivaattaa on käytetty pakollisissa kursseissa muun muassa funktion kasvamisen ja vähenemisen selvittämiseen sekä suurimpien ja pienimpien arvojen määrittämiseen. Niitä matemaattisia lauseita, joihin tällaiset derivaatan sovellukset perustuvat, ei käydä tässä kurssissa systemaattisesti läpi.

Eräs tärkeä lause on:

Integraalilaskennan peruslause. Oletetaan, että funktio f on jatkuva välillä $[a, b]$ ja derivoituva välillä $]a, b[$. Jos $f'(x) = 0$ jokaisessa välin $]a, b[$ pisteessä, niin funktio f on välillä $[a, b]$ vakiofunktio.

Integraalilaskennan peruslauseessa on oleellista, että funktiota tutkitaan välillä. Esimerkiksi funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, missä

$$f(x) = \begin{cases} -1, \text{ kun } x < 0 \\ 1, \text{ kun } x > 0, \end{cases}$$

derivaatta on nolla funktion f koko määrittelyjoukossa. Funktio f ei kuitenkaan ole vakiofunktio.

ESIMERKKI 4

Derivoituvalla funktiolla $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on ominaisuus: $f'(x) + 3f(x) = 0$ kaikilla x.

a) Osoita, että funktio $f(x)e^{3x}$ on vakiofunktio.

b) Määritä kaikki funktiot, joilla on ominaisuus $f'(x) + 3f(x) = 0$.

Ratkaisu

a) Derivoidaan funktio $g(x) = f(x)e^{3x}$.

$$g'(x) = f'(x)e^{3x} + f(x) \cdot e^{3x} \cdot 3 \qquad \mathrm{D}(fg) = f'g + fg'$$
$$= (f'(x) + 3f(x))e^{3x} \qquad f'(x) + 3f(x) = 0$$
$$= 0 \cdot e^{3x} = 0$$

Koska $g'(x) = 0$ kaikilla x ja funktion g määrittelyjoukko $\mathbb{R}$ on väli, niin integraalilaskennan peruslauseen nojalla funktio $g(x) = f(x)e^{3x}$ on vakiofunktio.

b) Jos derivoituvalle funktiolle $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pätee $f'(x) + 3f(x) = 0$ kaikilla x, niin a-kohdan nojalla on $f(x)e^{3x} = C$, missä C on vakio.

Siis $f(x) = \dfrac{C}{e^{3x}}$ eli $f(x) = Ce^{-3x}$, missä C on vakio.

Kääntäen jokaisella funktiolla $f(x) = Ce^{-3x}$ on kyseinen ominaisuus, sillä $f'(x) = -3Ce^{-3x}$ ja

$$f'(x) + 3f(x) = -3Ce^{-3x} + 3Ce^{-3x} = 0.$$

Siis kyseinen ominaisuus on funktioilla, jotka ovat muotoa $f(x) = Ce^{-3x}$, missä C on vakio.

Vastaus

b) funktiot $f(x) = Ce^{-3x}$, C vakio

TEHTÄVIÄ

SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

80. Derivoi funktio $f(x) = e^{-3x}$. Mikä on funktion kuvaajalle kuvaajan ja y-akselin leikkauspisteeseen piirretyn tangentin kulmakerroin?

81. Määritä funktion $f(x) = x^2$ derivaatta kohdassa 1 erotusosamäärän raja-arvona käyttäen erotusosamäärän muotoa

a) $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ b) $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

82. Tutki, onko funktio f derivoituva kohdassa 0. Jos on, niin mikä on $f'(0)$?

a) $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ kun } x < 0 \\ 2x, \text{ kun } x \geqslant 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ kun } x \leqslant 0 \\ 2x^2, \text{ kun } x > 0 \end{cases}$

83. Tutki erotusosamäärän avulla, onko funktio

a) $|x|$ b) $x|x|$ c) $|x| \sin x$

derivoituva kohdassa 0.

84. Funktiosta f tiedetään, että $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = 0$. Tutki seuraavista väitteistä, onko väite aina tosi, joskus tosi vai ei koskaan tosi.

a) $f'(2) = 2$
b) $f(2) = 0$
c) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$
d) Funktio f on jatkuva kohdassa 0.
e) Funktio f on jatkuva kohdassa 2.

85. Funktiosta g tiedetään, että $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(1+h)-g(1)}{h} = 2$, mutta ei mitään muuta. Mitä tiedetään funktion jatkuvuudesta ja derivoituvuudesta? Tiedetäänkö jokin funktion g tai sen derivaatan arvo?

86. Oletetaan, että funktio f on derivoituva kohdassa a. Määritä

a) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)^2 - f(a)^2}{x-a}$

b) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)^2 - f(a)^2}{x^2 - a^2}$ $(a \neq 0)$.

87. Konstruoi esimerkki funktiosta $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolla on täsmälleen yksi epäjatkuvuuspiste ja jolla ei ole derivaattaa kahdessa pisteessä. Anna $f(x)$:n lauseke ja piirrä f:n kuvaaja.
(Ylioppilaskoe, k. 1995)

88. Olkoon funktio f jatkuva origossa. Määritä erotusosamäärän avulla funktion $g(x) = xf(x)$ derivaatta origossa. Voidaanko tätä tulosta soveltaa funktioon $f(x) = |x| + 1$?
(Ylioppilaskoe, k. 2005)

89. Derivoituville funktioille $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pätee $f(x)g(x) = x$ kaikilla x. Osoita, että

a) funktioilla f ja g ei ole yhteisiä nollakohtia
b) funktioilla f' ja g' ei ole yhteisiä nollakohtia.

90. Derivoituvalla funktiolla $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on ominaisuus: $f'(x) + 2xf(x) = 0$ kaikilla x.

a) Osoita, että funktio $f(x)e^{x^2}$ on vakiofunktio.
b) Määritä kaikki funktiot f, joilla on kyseinen ominaisuus.

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

91. Määritä funktion $f(x) = \sqrt{x}$ derivaatta kohdassa 1 erotusosamäärän raja-arvona käyttäen erotusosamäärän muotoa

a) $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ b) $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

92. Määritä funktion $f(x) = \dfrac{1}{x}$ derivaatta kohdassa $x = 1$ laskemalla erotusosamäärän raja-arvo.

93. Lausekkeet $\dfrac{e^x-1}{x}$, $\dfrac{\cos x - 1}{x}$, $\dfrac{\sin x}{x}$ ja $\dfrac{\ln(x+1)}{x}$ ovat kaikki erotusosamääriä.

Käytä hyväksi lausekkeissa esiintyvien funktioiden derivaattoja ja päättele raja-arvot

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x}$.

94. Tutki, onko funktio f derivoituva kohdassa 2. Jos funktio f on derivoituva, niin mikä on $f'(2)$? Piirrä kuvaaja.

a)

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ kun } x < 2 \\ 2x, \text{ kun } x \geqslant 2 \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ kun } x \leqslant 2 \\ 4x-4, \text{ kun } x > 2 \end{cases}$$

95. Miten määritellään kasvava funktio? Anna esimerkki epäjatkuvasta kasvavasta funktiosta. Anna esimerkki kasvavasta funktiosta, joka on origossa jatkuva mutta ei derivoituva. Piirrä funktioiden kuvaajat. (Ylioppilaskoe, k. 1997)

96. Kahdesti derivoituvalla* funktiolla $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on ominaisuus: $f(x) + f''(x) = 0$ kaikilla x. Osoita, että funktio $f(x)^2 + f'(x)^2$ on vakiofunktio. Anna esimerkki ehdon $f(x) + f''(x) = 0$ täyttävästä funktiosta, joka ei ole vakiofunktio.

97. Funktio f on muotoa

$f(x) = \dfrac{\sin x + \sin(x-a)}{\cos x - \cos(x-a)}$, missä luku a ei ole 2π:n monikerta.

a) Millä muuttujan arvoilla funktio f ei ole määritelty?

b) Osoita, että funktio f on vakiofunktio jokaisella määrittelyjoukkonsa välillä.

98. Funktiolla $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on seuraavat ominaisuudet: $f(a+b) = f(a) + f(b)$ kaikilla a ja b ja $f(0) = 0$. Osoita, että jos funktio f on derivoituva kohdassa 0, niin se on derivoituva kaikkialla ja $f'(x) = f'(0)$. Vertaa edellisen luvun esimerkkiin 3 sivulla 32.

99. Funktiolla $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on ominaisuudet: $f(a+b) = f(a)f(b)$ kaikilla a ja b ja $f(0) = 1$. Osoita, että jos funktio f on derivoituva kohdassa 0, niin se on derivoituva kaikkialla ja $f'(x) = f'(0)f(x)$. Vertaa edellisen luvun tehtävään 70.

100. Eräällä funktiolla $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on ominaisuus: $f(a+b) = f(a) + f(b) + 2ab$ kaikilla a ja b. Lisäksi funktio f on derivoituva kohdassa 0 ja $f'(0) = 3$.

a) Määritä $f(0)$.

b) Osoita, että funktio f on derivoituva kaikkialla, ja määritä derivaattafunktio $f'(x)$.

c) Määritä funktio f.

---

* Funktio on kahdesti derivoituva, jos sen derivaattafunktio on derivoituva.

101. Miten määritellään funktion f derivaatta kohdassa $x = a$? Anna esimerkki funktiosta, joka ei ole derivoituva kohdassa $x = 1$. Määritellään funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seuraavasti:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & \text{kun } x \neq 0 \\ 0, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

Tutki, onko f derivoituva kohdassa $x = 0$.
(Ylioppilaskoe, s. 1999)

102. Graafisissa laskimissa on numeerinen derivointitoiminto. Laskin laskee derivaatan $f'(a)$ likiarvon niin sanotulla ”2h-kaavalla”

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}.$$

h:n oletusarvo monissa laskimissa on 0,001.

a) Perustele kaavan käyttö eli osoita: jos funktio f on derivoituva kohdassa a, niin

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a).$$

b) Havainnollista kuvion avulla, kuinka 2h-kaavalla saadaan usein parempi likiarvo derivaatalle $f'(a)$ kuin samalla h:n arvolla lasketulla erotusosamäärän $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ arvolla.

c) Näytä esimerkillä, että raja-arvo $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$ voi olla olemassa, vaikka funktio f ei ole derivoituva kohdassa a. Laskin siis saattaa antaa funktion derivaatalle likiarvon, vaikka derivaattaa ei ole edes olemassa.

Raja-arvo äärettömyydessä

Ongelma 1

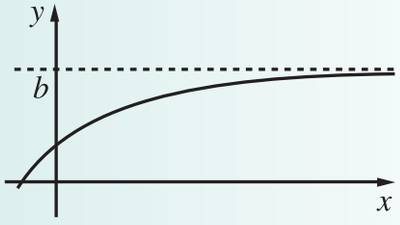
Tutki funktion a) 2^x ja e^x b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ ja e^{-x} arvoja, kun muuttujan x arvot suurenevat rajatta tai pienenevät rajatta.

Ongelma 2

Tutki sekä arvoja laskemalla että kuvaajan avulla, mitä lukua funktion $\frac{6x-5}{4x-1}$ arvot lähenevät, kun muuttujan arvot suurenevat rajatta tai pienenevät rajatta.

Funktion raja-arvo, kun muuttujan arvot suurenevat tai pienenevät rajatta

Jos muuttujan arvojen suuretessa funktion f arvot lähestyvät lukua b, niin sanotaan, että funktiolla f on *raja-arvo* b, *kun muuttujan arvot suurenevat rajatta*. Lähenemisen tulee olla sellaista, että tarpeeksi suurilla muuttujan arvoilla funktion arvot ovat niin lähellä lukua b, kuin suinkin halutaan.



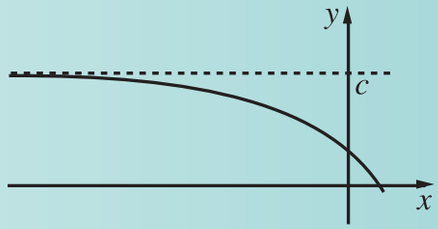
Jos funktiolla on raja-arvo b, kun muuttujan arvot suurenevat rajatta, niin merkitään

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b,$$

tai

$f(x) \to b$, kun $x \to \infty$.

Vastaavasti, jos muuttujan arvojen pienetessä funktion f arvot lähestyvät lukua c, niin sanotaan, että funktiolla f on *raja-arvo* c, *kun muuttujan arvot pienenevät rajatta*.



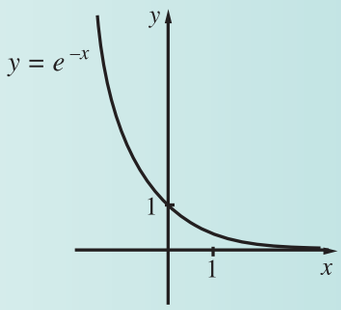
Tällöin merkitään

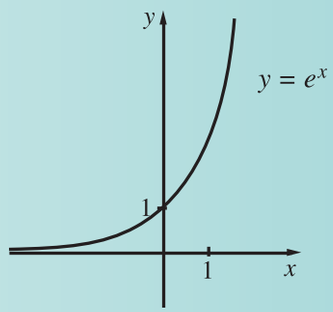
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = c,$$

tai

$f(x) \to c$, kun $x \to -\infty$.

Esimerkiksi on $\lim_{x \to \infty} e^{-x} = 0$ ja $\lim_{x \to -\infty} e^{x} = 0$.





Kun muuttujan arvot pienenevät rajatta, funktiolla e^{-x} ei ole raja-arvoa, vaan funktion arvot suurenevat rajatta eli $e^{-x} \to \infty$, kun $x \to -\infty$. Vastaavasti funktiolla e^{x} ei ole raja-arvoa, kun muuttujan arvot suurenevat rajatta, sillä $e^{x} \to \infty$, kun $x \to \infty$.

ESIMERKKI 1

Määritä. a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2 + 3e^x}{e^x}$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2 + 3e^x}{e^x}$

Ratkaisu

a) Jaetaan termeittäin.

$$\frac{2 + 3e^x}{e^x} = \frac{2}{e^x} + \frac{3e^x}{e^x} = \frac{2}{e^x} + 3 = 2e^{-x} + 3$$

Siis

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2 + 3e^x}{e^x} = \lim_{x \to \infty} (2e^{-x} + 3) \qquad \lim_{x \to \infty} e^{-x} = 0$$

$$= 2 \cdot 0 + 3 = 3.$$

b) Kun muuttujan arvot pienenevät rajatta, funktion e^{-x} arvot suurenevat rajatta, joten

$$\frac{2 + 3e^x}{e^x} = 2e^{-x} + 3 \to \infty, \text{ kun } x \to -\infty.$$

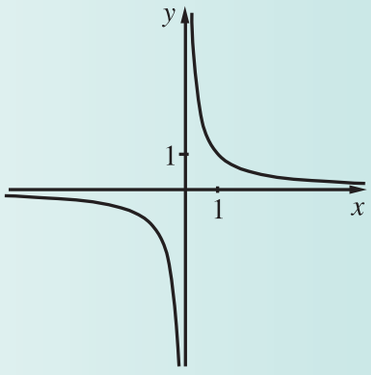
Funktiolla $\dfrac{2 + 3e^x}{e^x}$ ei ole raja-arvoa, kun muuttujan arvot pienenevät rajatta.

Vastaus

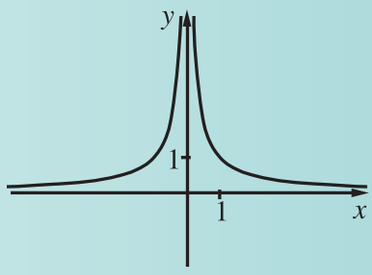
a) 3 b) Ei raja-arvoa.*

* Raja-arvot voi tarkistaa graafisella laskimella piirretystä kuvaajasta.

Funktiot $\frac{1}{x^n}$, n positiivinen kokonaisluku



n pariton ($\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^3}$ jne.)



n parillinen ($\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^4}$ jne.)

Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Kun muuttujan x arvot suurenevat tai pienenevät rajatta, funktioiden $\frac{1}{x^n}$ arvot lähestyvät nollaa:

$\frac{1}{x^n} \to 0$, kun $x \to \infty$,

ja

$\frac{1}{x^n} \to 0$, kun $x \to -\infty$.

Asymptootti

Raja-arvot $\frac{1}{x^n} \to 0$, kun $x \to \infty$, ja $\frac{1}{x^n} \to 0$, kun $x \to -\infty$, havainnollistuvat funktioiden $\frac{1}{x^n}$ kuvaajissa niin, että kuvaajat lähestyvät rajatta x-akselia (suoraa $y = 0$). Sanotaan, että x-akseli on kuvaajien vaakasuora *asymptootti*.*

Muuttujan arvojen lähestyessä nollaa kuvaajat lähenevät y-akselia (suoraa $x = 0$), joten y-akseli on kuvaajien pystysuora asymptootti.

---

* Sana asymptootti tulee kreikan sanasta *asymptotos*, jossa *symptotos* on ”kohtaava” ja alkukirjain *a* on kieltävä etuliite. Siis asymptootti on ”ei-kohtaava”.

Seuraavissa esimerkeissä nähdään, miten funktioiden $\frac{1}{x^n}$ avulla voidaan päätellä jokaisen rationaalifunktion raja-arvo, kun muuttujan arvot suurenevat tai pienenevät rajatta.

ESIMERKKI 2

Tutki funktion raja-arvoja, kun muuttujan arvot suurenevat rajatta ja pienenevät rajatta. Jos raja-arvoja ei ole, niin suurenevatko tai pienenevätkö funktion arvot rajatta?

a) $\frac{3x^2 - 5}{x^2}$ b) $\frac{4x^2 + x - 5}{x}$

Ratkaisu

a) $\frac{3x^2 - 5}{x^2}$ Jaetaan termeittäin.

$= \frac{3x^2}{x^2} - \frac{5}{x^2} = 3 - \frac{5}{x^2}$ $\frac{5}{x^2} = 5 \cdot \frac{1}{x^2} \to 0$, kun $x \to \infty$ tai $x \to -\infty$

$\to 3 - 0 = 3$, kun $x \to \infty$ tai $x \to -\infty$

b) $\frac{4x^2 + x - 5}{x}$ Jaetaan termeittäin.

$= \frac{4x^2}{x} + \frac{x}{x} - \frac{5}{x} = 4x + 1 - \frac{5}{x}$

Kun muuttujan x arvot suurenevat tai pienenevät rajatta, funktion $\frac{5}{x}$ arvot lähestyvät raja-arvoa 0, joten funktion $4x + 1 - \frac{5}{x}$ arvot lähenevät funktion $4x + 1$ arvoja. Funktion $4x + 1$ arvot eivät lähesty mitään raja-arvoa, vaan suurenevat rajatta, kun muuttujan arvot suurenevat rajatta, ja pienenevät rajatta, kun muuttujan arvot pienenevät rajatta.*

Siis

$$\frac{4x^2 + x - 5}{x} = \overset{\infty}{4x} + 1 - \overset{0}{\frac{5}{x}} \to \infty, \text{ kun } x \to \infty,$$

ja

$$\frac{4x^2 + x - 5}{x} = \overset{-\infty}{4x} + 1 - \overset{0}{\frac{5}{x}} \to -\infty, \text{ kun } x \to -\infty.$$

Vastaus

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 5}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x^2 - 5}{x^2} = 3$

b) ei raja-arvoja; $\frac{4x^2 + x - 5}{x} \to \infty$, kun $x \to \infty$, ja

$\frac{4x^2 + x - 5}{x} \to -\infty$, kun $x \to -\infty$

* Kurssissa Derivaatta on opittu, että polynomifunktion käyttäytymisen lukusuoran äärilaidoilla määrää funktion lausekkeen korkeimman asteen termi.

ESIMERKKI 3

Tutki funktion raja-arvoja, kun muuttujan arvot suurenevat rajatta ja pienenevät rajatta. Jos raja-arvoa ei ole, niin suurenevatko tai pienenevätkö funktion arvot rajatta?

a) $\dfrac{2x-7}{3x^2+4}$ b) $\dfrac{5x^2+2x}{3x^2+4}$ c) $\dfrac{-4x^3+5x}{3x^2+4}$

Ratkaisu

a) Lausekkeen $\dfrac{2x-7}{3x^2+4}$ osoittaja ja nimittäjä jaetaan nimittäjän korkeimmalla potenssilla x^2.

$$\frac{2x-7}{3x^2+4} = \frac{\dfrac{2x}{x^2} - \dfrac{7}{x^2}}{\dfrac{3x^2}{x^2} + \dfrac{4}{x^2}}$$

$$= \frac{\dfrac{2}{x} - \dfrac{7}{x^2}}{3 + \dfrac{4}{x^2}} \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{a}{x^n} = 0 \text{ ja } \lim_{x \to -\infty} \frac{a}{x^n} = 0$$

$$\to \frac{0-0}{3+0} = \frac{0}{3} = 0, \text{ kun } x \to \infty \text{ tai } x \to -\infty$$

b) Osoittaja ja nimittäjä jaetaan nimittäjän korkeimmalla potenssilla x^2.

$$\frac{5x^2+2x}{3x^2+4} = \frac{\dfrac{5x^2}{x^2} + \dfrac{2x}{x^2}}{\dfrac{3x^2}{x^2} + \dfrac{4}{x^2}}$$

$$= \frac{5 + \dfrac{2}{x}}{3 + \dfrac{4}{x^2}} \to \frac{5+0}{3+0} = \frac{5}{3}, \text{ kun } x \to \infty \text{ tai } x \to -\infty$$

c) Osoittaja ja nimittäjä jaetaan nimittäjän korkeimmalla potenssilla.

$$\frac{-4x^3+5x}{3x^2+4} = \frac{\frac{-4x^3}{x^2}+\frac{5x}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{4}{x^2}} = \frac{-4x+\frac{5}{x}}{3+\frac{4}{x^2}}$$

Kun muuttujan arvot suurenevat tai pienenevät rajatta, osoittajan arvot lähenevät funktion $-4x$ arvoja ja nimittäjän arvot positiivista lukua 3. Funktiolla ei ole raja-arvoja. Koska $-4x \to -\infty$, kun $x \to \infty$, ja $-4x \to \infty$, kun $x \to -\infty$, niin

$$\frac{-4x^3+5x}{3x^2+4} = \frac{\overset{-\infty}{\overbrace{-4x}}+\overset{0}{\overbrace{\frac{5}{x}}}}{3+\underset{0}{\underbrace{\frac{4}{x^2}}}} \to -\infty, \text{ kun } x \to \infty,$$

ja

$$\frac{-4x^3+5x}{3x^2+4} = \frac{\overset{\infty}{\overbrace{-4x}}+\overset{0}{\overbrace{\frac{5}{x}}}}{3+\underset{0}{\underbrace{\frac{4}{x^2}}}} \to \infty, \text{ kun } x \to -\infty.$$

Vastaus

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x-7}{3x^2+4} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x-7}{3x^2+4} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^2+2x}{3x^2+4} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5x^2+2x}{3x^2+4} = \frac{5}{3}$

c) ei raja-arvoja; $\frac{-4x^3+5x}{3x^2+4} \to -\infty$, kun $x \to \infty$, ja

$\frac{-4x^3+5x}{3x^2+4} \to \infty$, kun $x \to -\infty$

Kun tutkitaan funktion suurinta ja pienintä arvoa lukusuoran rajoittamattomalla välillä, on selvitettävä raja-arvot, kun muuttujan arvot suurenevat tai pienenevät rajatta.

ESIMERKKI 4

Määritä funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{3x^2 + 4x}{x^2 + 1}$, suurin ja pienin arvo.

Hahmottele funktion f kuvaaja.

Ratkaisu

Koska funktion $f(x) = \dfrac{3x^2 + 4x}{x^2 + 1}$ nimittäjän $x^2 + 1$ kaikki arvot ovat positiivisia, funktion f määrittelyjoukko on koko reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$.

Selvitetään funktion f kulku.

Derivoidaan.

$$f'(x) = \frac{(6x + 4)(x^2 + 1) - (3x^2 + 4x) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} \qquad \mathrm{D}\frac{f}{g} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$= \frac{6x^3 + 6x + 4x^2 + 4 - 6x^3 - 8x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{-4x^2 + 6x + 4}{(x^2 + 1)^2}$$

Koska derivaattafunktio on määritelty kaikkialla, sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa.* Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

---

* Yleisesti rationaalifunktion merkki voi vaihtua myös kohdissa, joissa funktio ei ole määritelty.

$$\frac{-4x^2 + 6x + 4}{(x^2 + 1)^2} = 0$$

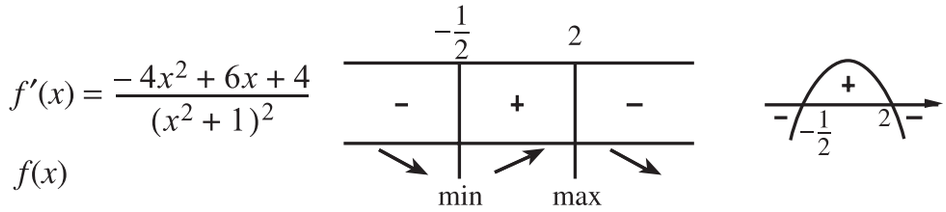
$-4x^2 + 6x + 4 = 0 \qquad | : (-2)$

$2x^2 - 3x - 2 = 0$ Yhtälö ratkaistaan ratkaisukaavalla.

$x = -\frac{1}{2}$ tai $x = 2$

Laaditaan derivaattafunktion $f'(x)$ merkkikaavio ja täydennetään se funktion f kulkukaavioksi.

Derivaattafunktion nimittäjänä oleva lauseke $(x^2 + 1)^2$ on kaikkialla positiivinen, joten derivaattafunktion merkit määrää osoittaja $-4x^2 + 6x + 4$. Funktion $-4x^2 + 6x + 4$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.*



Funktiolla $f(x) = \frac{3x^2 + 4x}{x^2 + 1}$ on minimikohta $-\frac{1}{2}$. Minimiarvo on

$$f(-\frac{1}{2}) = \frac{3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1} = \frac{-\frac{5}{4}}{\frac{5}{4}} = -1.$$

Kulkukaaviosta nähdään, että minimiarvo $f(-\frac{1}{2}) = -1$ on funktion f pienin arvo, jos $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) \geqslant -1$.

---

* Derivaattafunktion merkit voidaan päätellä myös laskemalla yksi funktion $f'(x)$ arvo jokaisesta merkkikaavion lokerosta.

Funktiolla f on maksimikohta 2. Maksimiarvo on

$$f(2) = \frac{3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2}{2^2 + 1} = \frac{20}{5} = 4.$$

Kulkukaaviosta nähdään, että maksimiarvo $f(2) = 4$ on funktion f suurin arvo, jos $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \leqslant 4$.

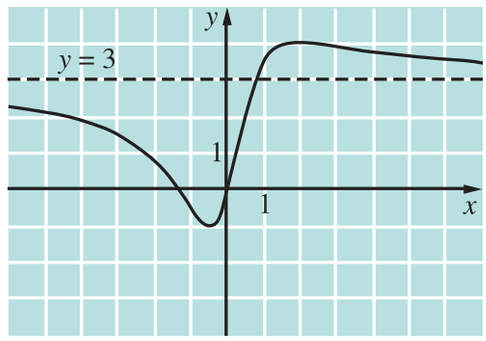
Koska

$$f(x) = \frac{3x^2 + 4x}{x^2 + 1} = \frac{\dfrac{3x^2}{x^2} + \dfrac{4x}{x^2}}{\dfrac{x^2}{x^2} + \dfrac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{3 + \dfrac{4}{x}}{1 + \dfrac{1}{x^2}} \to \frac{3 + 0}{1 + 0} = 3, \text{ kun } x \to \infty \text{ tai } x \to -\infty,$$

ja $-1 < 3 < 4$, niin maksimiarvo 4 on funktion suurin arvo ja minimiarvo -1 on funktion pienin arvo.

Funktion f kuvaaja hahmotellaan ääriarvojen ja muutaman muun pisteen avulla. Koska funktion arvot lähenevät arvoa 3 muuttujan arvojen suuretessa ja pienetessä rajatta, kuvaaja lähestyy suoraa $y = 3$. Suora $y = 3$ on kuvaajan vaakasuora asymptootti.



Vastaus suurin arvo 4, pienin arvo -1

ESIMERKKI 5

Tutki, missä funktio $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x - 1}$ on kasvava ja missä vähenevä. Määritä ääriarvokohdat ja ääriarvot. Onko funktiolla f suurin tai pienin arvo? Hahmottele kuvaaja.

Ratkaisu

Funktio f ei ole määritelty nimittäjän $x - 1$ nollakohdassa 1. Funktion f määrittelyjoukko on $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Selvitetään funktion f kulku.

Derivoidaan.

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x-1) - (x^2 + 3) \cdot 1}{(x-1)^2} \qquad \mathrm{D}\frac{f}{g} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 2x - x^2 - 3}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$$

Rationaalifunktio voi vaihtaa merkkiään nollakohdissaan ja kohdissa, joissa funktio ei ole määritelty.

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = 0$$

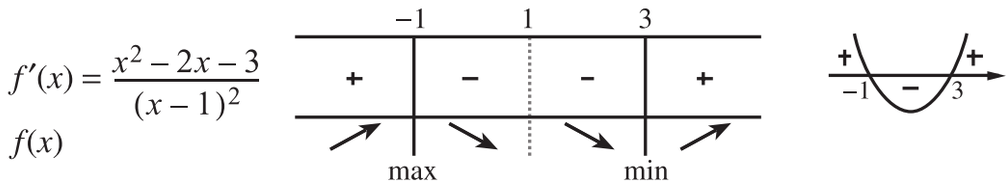
$x^2 - 2x - 3 = 0$ Yhtälö ratkaistaan ratkaisukaavalla.

$x = -1$ tai $x = 3$

Molemmat juuret kuuluvat määrittelyjoukkoon $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Laaditaan derivaattafunktion $f'(x)$ merkkikaavio ja täydennetään se funktion $f(x)$ kulkukaavioksi. Kaavioon merkitään derivaattafunktion nollakohdat -1 ja 3 sekä kohta 1, jossa funktiot f ja f' eivät ole määritellyt.

Derivaattafunktion $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$ nimittäjänä oleva lauseke $(x-1)^2$ on funktion koko määrittelyjoukossa positiivinen, joten derivaattafunktion merkit määrää osoittaja $x^2 - 2x - 3$.
Funktion $x^2 - 2x - 3$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.*



Kulkukaavion mukaan funktio f on aidosti kasvava väleillä $]-\infty, -1]$ ja $[3, \infty[$ ja aidosti vähenevä väleillä $[-1, 1[$ ja $]1, 3]$.

Funktiolla f on maksimikohta -1. Vastaava maksimiarvo on

$$f(-1) = \frac{(-1)^2 + 3}{-1 - 1} = -2.$$

Funktiolla f on minimikohta 3. Vastaava minimiarvo on

$$f(3) = \frac{3^2 + 3}{3 - 1} = 6.$$

Tutkitaan funktion arvoja, kun muuttujan arvot suurenevat tai pienenevät rajatta:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1} = \frac{\frac{x^2}{x} + \frac{3}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}} = \frac{x + \frac{3}{x}}{1 - \frac{1}{x}} \to \infty, \text{ kun } x \to \infty,$$

($x \to \infty$, $\frac{3}{x} \to 0$, $1 - \frac{1}{x} \to 0$)

ja

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1} = \frac{x + \frac{3}{x}}{1 - \frac{1}{x}} \to -\infty, \text{ kun } x \to -\infty.$$

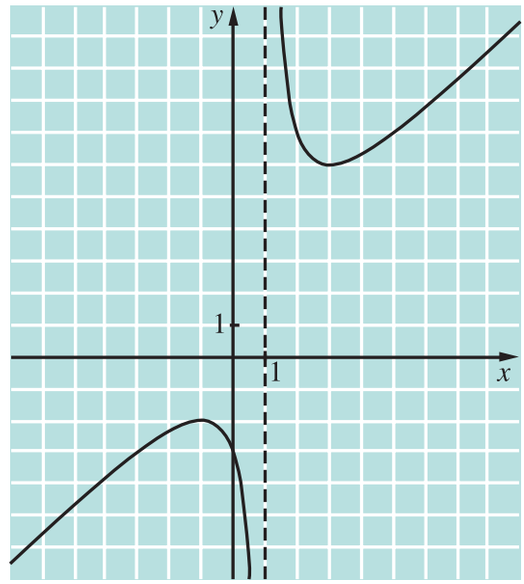
($x \to -\infty$, $\frac{3}{x} \to 0$, $1 - \frac{1}{x} \to 0$)

---

* Derivaattafunktion merkit voidaan päätellä myös laskemalla yksi funktion f' arvo jokaisesta merkkikaavion lokerosta.

Funktion f arvot suurenevat rajatta, kun muuttujan arvot suurenevat rajatta, ja pienenevät rajatta, kun funktion arvot pienenevät rajatta. Siis funktiolla f ei ole suurinta eikä pienintä arvoa.

Kuvaaja voidaan hahmotella ääriarvojen ja muutaman lasketun arvon avulla. Koska funktio f ei ole määritelty kohdassa 1, suora $x = 1$ jakaa kuvaajan kahteen osaan. Suora $x = 1$ on kuvaajan pystysuora asymptootti.*



Vastaus

Funktio f on aidosti kasvava väleillä $]-\infty, -1]$ ja $[3, \infty[$ ja aidosti vähenevä väleillä $[-1, 1[$ ja $]1, 3]$.
Funktiolla f on maksimiarvo -2 kohdassa -1 ja minimiarvo 6 kohdassa 3.
Funktiolla f ei ole suurinta eikä pienintä arvoa.

---

* Kuvaajassa havainnollistuu, että funktiolla $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x - 1}$ ei ole raja-arvoa kohdassa $x = 1$ (lauseke ei ole ”muotoa $\dfrac{0}{0}$”).
Kun $x \to 1+$, niin $f(x) \to \infty$, ja kun $x \to 1-$, niin $f(x) \to -\infty$.

ESIMERKKI 6

Määritä. a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{3x^2 + 4x}}{x}$ b) $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x)$

Ratkaisu

a) Koska tutkitaan funktion $\dfrac{\sqrt{3x^2 + 4x}}{x}$ raja-arvoa, kun muuttujan x arvot suurenevat rajatta, voidaan olettaa, että $x > 0$.

Kun $x > 0$, niin $x = \sqrt{x^2}$ ja

$$\frac{\sqrt{3x^2 + 4x}}{x} = \frac{\sqrt{3x^2 + 4x}}{\sqrt{x^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{3x^2 + 4x}{x^2}} \qquad \text{Jaetaan termeittäin.}$$

$$= \sqrt{3 + \frac{4}{x}} \to \sqrt{3 + 0} = \sqrt{3}\text{, kun } x \to \infty.$$

Siis $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{3x^2 + 4x}}{x} = \sqrt{3}$.

b) Lavennetaan erotus $\sqrt{x^2 + 5x} - x$ vastaavalla summalla $\sqrt{x^2 + 5x} + x$, jolloin

$$\sqrt{x^2 + 5x} - x$$ Lavennetaan summalla $\sqrt{x^2 + 5x} + x$.

$$= \frac{(\sqrt{x^2 + 5x} + x)(\sqrt{x^2 + 5x} - x)}{\sqrt{x^2 + 5x} + x}$$ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$$= \frac{(x^2 + 5x) - x^2}{\sqrt{x^2 + 5x} + x}$$

$$= \frac{5x}{\sqrt{x^2 + 5x} + x}$$ Jaetaan osoittaja ja nimittäjä x:llä.

$$= \frac{5}{\frac{\sqrt{x^2 + 5x}}{x} + 1}$$ Voidaan olettaa, että $x > 0$, jolloin $x = \sqrt{x^2}$.

$$= \frac{5}{\sqrt{\frac{x^2 + 5x}{x^2}} + 1}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{1 + \frac{5}{x}} + 1} \to \frac{5}{\sqrt{1 + 0} + 1} = \frac{5}{2}, \text{ kun } x \to \infty.$$

Vastaus a) $\sqrt{3}$ b) $\frac{5}{2}$

TEHTÄVIÄ

SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

103. Määritä raja-arvo. Jos raja-arvoa ei ole, niin suurenevatko tai pienenevätkö funktion arvot rajatta?

a) $\lim\limits_{x \to \infty} (3 - 4e^x)$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (3 - 4e^x)$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3 - 4e^x}{e^x}$ d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3 - 4e^x}{e^x}$

104. Määritä funktion raja-arvo, kun muuttujan arvot suurenevat rajatta ja pienenevät rajatta. Jos raja-arvoa ei ole, niin suurenevatko vai pienenevätkö funktion arvot rajatta?

a) $f(x) = \dfrac{5x - 12}{x^2}$ b) $g(x) = \dfrac{4x + 5}{x}$

c) $h(x) = \dfrac{-3x^2 + 1}{x}$

105. Määritä funktion raja-arvo, kun muuttujan arvot suurenevat rajatta ja pienenevät rajatta. Jos raja-arvoa ei ole, niin suurenevatko vai pienenevätkö funktion arvot rajatta?

a) $f(x) = \dfrac{4}{2x - 1}$ b) $g(x) = \dfrac{6x + 4}{2x - 1}$

c) $h(x) = \dfrac{2x^2 + 3}{2x - 1}$

106. Määritä funktion raja-arvo, kun muuttujan arvot suurenevat rajatta ja pienenevät rajatta. Jos raja-arvoa ei ole, niin suurenevatko vai pienenevätkö funktion arvot rajatta?

a) $f(x) = \dfrac{7x - 9}{3x^2 - x}$ b) $g(x) = \dfrac{3x^2 - 7}{6x^2 - x}$

c) $h(x) = \dfrac{x^4 - 7x}{x^2 + 1}$

107. Osoita y-koordinaattien erotusta tarkastelemalla, että käyrä $y = \ln(1 + e^x)$ lähenee rajattomasti suoraa $y = x$, kun $x \to \infty$.
(Ylioppilaskoe, s. 2001)

108. Määritä funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 1}$, suurin ja pienin arvo.

109. a) Määritä funktion $f(x) = \dfrac{x + 2}{x - 3}$ raja-arvo, kun muuttujan arvot suurenevat ja pienenevät rajatta.
b) Missä funktio f on kasvava ja missä vähenevä? Onko funktiolla f ääriarvoja?
c) Hahmottele funktion f kuvaaja. Piirrä samaan kuvioon myös kuvaajan mahdollinen pystysuora ja vaakasuora asymptootti. Onko funktiolla f suurin tai pienin arvo?

110. a) Missä funktio $f(x) = \dfrac{x^2}{x + 1}$ on kasvava ja missä vähenevä?
b) Määritä funktion f ääriarvokohdat ja ääriarvot. Onko funktiolla f suurin tai pienin arvo?
c) Hahmottele funktion f kuvaaja.

111. Määritä.

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{9x^2 + x}}{5x}$ b) $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x)$

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

112. Määritä.

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2e^x}{1 + 3e^x}$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2e^x}{1 + 3e^x}$

113. Määritä funktion raja-arvo, kun muuttujan arvot suurenevat rajatta ja pienenevät rajatta. Jos raja-arvoa ei ole, niin suurenevatko vai pienenevätkö funktion arvot rajatta?

a) $f(x) = \dfrac{5}{1 - 2x}$ b) $g(x) = \dfrac{3 + 5x}{1 - 2x}$

c) $h(x) = \dfrac{3x + 5x^2}{1 - 2x}$

114. Mitä raja-arvoa funktion arvot lähenevät, kun muuttujan arvot suurenevat rajatta?

a) $f(x) = \ln(2x + 3) - \ln(x + 5)$

b) $g(x) = \ln(2x + 3) - \ln(2x + 5)$

c) $h(x) = \ln(2x + 3) - \ln(x^2 + 5)$

115. Määritä funktion raja-arvo, kun muuttujan arvot suurenevat rajatta ja pienenevät rajatta.

a) $f(x) = 3x - \dfrac{6x^2 - x + 2}{2x + 1}$

b) $g(x) = x + 4 - \dfrac{x^2 + x}{x - 3}$

116. Määritä funktion $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x^2 + 3}$

a) suurin ja pienin arvo b) arvojoukko.

117. a) Mitä raja-arvoa funktion $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x + 1}$ arvot lähenevät, kun muuttujan arvot suurenevat ja pienenevät rajatta?

b) Missä funktio f on kasvava ja missä vähenevä? Onko funktiolla ääriarvoja?

c) Hahmottele funktion f kuvaaja. Piirrä samaan kuvioon myös kuvaajan mahdollinen pystysuora ja vaakasuora asymptootti.

118. a) Missä funktio $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 2}$ on kasvava ja missä vähenevä?

b) Määritä funktion ääriarvokohdat ja ääriarvot. Onko funktiolla f suurin tai pienin arvo?

c) Hahmottele kuvaaja. Onko kuvaajalla pystysuora tai vaakasuora asymptootti?

119. Määritä.

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x}{\sqrt{9x^2 + x} + 4x}$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{9x^2 + x} - 3x)$

120. Funktio P on astetta m oleva polynomifunktio $P(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Funktio Q on astetta n oleva polynomifunktio $Q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$. Mikä on funktion $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ raja-arvo, kun muuttujan arvot suurenevat rajatta ja pienenevät rajatta?

121. Osoita, että käyrä $y = \dfrac{x^2 - 5}{x + 3}$ lähenee rajattomasti suoraa $y = x - 3$, kun $x \to \infty$ tai $x \to -\infty$. Millä muuttujan arvoilla on $\left| \dfrac{x^2 - 5}{x + 3} - (x - 3) \right| < 10^{-4}$?

122. Osoita, että $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = 0$.

Määritä jokin sellainen luku h, että $0 < \sqrt{x^2 + 1} - x < 10^{-3}$, kun $x > h$.

(Ylioppilaskoe, s. 1997)

123. Olkoon $f(x) = \dfrac{2x + 1}{3x - 1} - \lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{2t + 1}{3t - 1}$.

Määritä derivaatta $f'(x)$, kun $x > \dfrac{1}{3}$.

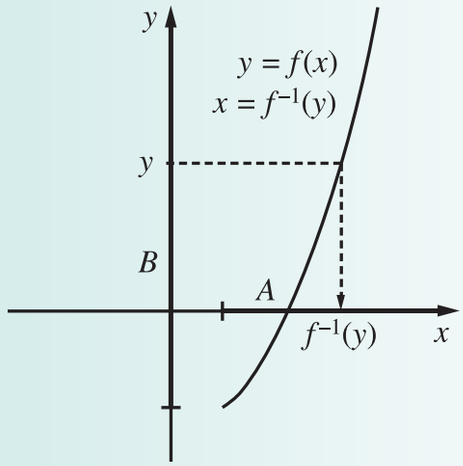
Laske $\int_1^2 f(x)\,dx$. (Ylioppilaskoe, s. 1995)

Käänteisfunktio

Käänteisfunktio

Oletetaan, että funktio $f: A \to \mathbb{R}$ saa jokaisen arvonsa vain yhdessä kohdassa. Jos luku y kuuluu funktion f arvojoukkoon B, niin yhtälöllä $f(x) = y$ on yksikäsitteinen ratkaisu. Määrittelemällä:

$f^{-1}(y)$ on yhtälön $f(x) = y$ ratkaisu, saadaan funktion f *käänteisfunktio* $f^{-1} : B \to \mathbb{R}$.

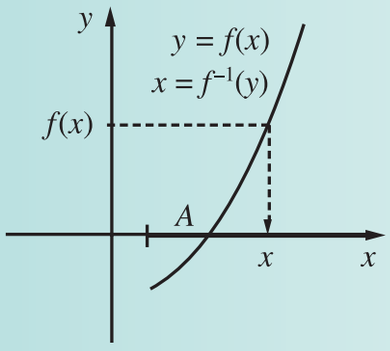


Siis

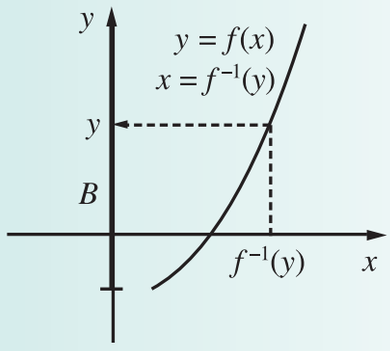
$x = f^{-1}(y)$, jos ja vain jos $f(x) = y$.

Funktio $f: A \to \mathbb{R}$ ja sen käänteisfunktio $f^{-1} : B \to \mathbb{R}$ kumoavat toisensa:

$f^{-1}(f(x)) = x$ ja $f(f^{-1}(y)) = y$.



Funktion f^{-1} arvo kohdassa $f(x)$ on x eli $f^{-1}(f(x)) = x$.



Funktion f arvo kohdassa $f^{-1}(y)$ on y eli $f(f^{-1}(y)) = y$.

Aidosti kasvava tai aidosti vähenevä funktio saa jokaisen arvonsa vain yhdessä kohdassa. Siis:

Monotonisuus ja käänteisfunktio

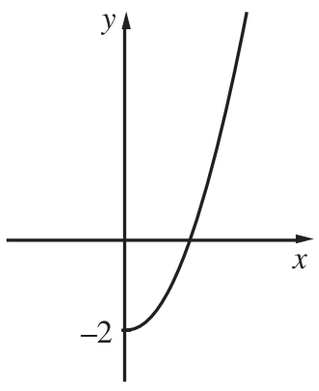
Jos funktio $f: A \to \mathbb{R}$ on aidosti kasvava tai aidosti vähenevä, niin funktiolla f on käänteisfunktio $f^{-1}: B \to \mathbb{R}$, missä B on funktion f arvojoukko.

ESIMERKKI 1

a) Osoita, että funktiolla $f: [0, \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2$, on käänteisfunktio. Mikä käänteisfunktion f^{-1} määrittelyjoukko on?
b) Määritä käänteisfunktion $f^{-1}(y)$ lauseke. Vaihda käänteisfunktion muuttujaksi x, ja piirrä samaan koordinaatistoon funktioiden $f(x)$ ja $f^{-1}(x)$ kuvaajat.

Ratkaisu

a) Funktion $f: [0, \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2$, kuvaaja on paraabelin $y = x^2 - 2$ haara, jossa $x \geqslant 0$. Paraabelin huippu on y-akselilla pisteessä $(0, -2)$.



Funktio f on aidosti kasvava, joten funktiolla f on käänteisfunktio.

Kun muuttujan arvot suurenevat rajatta, funktion $f(x) = x^2 - 2$ arvot suurenevat rajatta, joten funktion f arvojoukko on väli $[-2, \infty[$. Käänteisfunktion f^{-1} määrittelyjoukko on siten $[-2, \infty[$.

b) Käänteisfunktion arvo $f^{-1}(y)$ on yhtälön $f(x) = y$ ratkaisu.

Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.

$$x^2 - 2 = y \qquad f(x) = y$$

$$x^2 = y + 2$$

$x = \sqrt{y+2}$ tai $x = -\sqrt{y+2}$

Koska $x \geqslant 0$, niin $x = \sqrt{y+2}$.

Siis $f^{-1}(y) = \sqrt{y+2}$.

Vaihdetaan muuttujaksi x, jolloin käänteisfunktio on

$f^{-1} : [-2, \infty[\to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x+2}$.

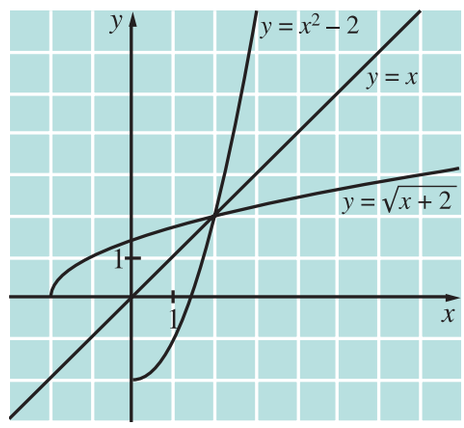
Funktion $f(x)$ kuvaajan piirtämiseksi taulukoidaan funktion arvoja.

x	$f(x) = x^2 - 2$	(x, y)
0	−2	(0, −2)
1	−1	(1, −1)
2	2	(2, 2)
3	7	(3, 7)

Käänteisfunktion $f^{-1}(x)$ arvoja voidaan laskea tai niitä voidaan suoraan lukea edellisestä taulukosta, sillä $f^{-1}(f(x)) = x$.

x	$f^{-1}(x) = \sqrt{x+2}$	(x, y)
−2	0	(−2, 0)
−1	1	(−1, 1)
2	2	(2, 2)
7	3	(7, 3)

Käänteisfunktion $f^{-1}(x)$ kuvaajan pisteet saadaan funktion $f(x)$ kuvaajan pisteistä vaihtamalla pisteiden x- ja y-koordinaatit keskenään.



Käänteisfunktion $f^{-1}(x)$ kuvaaja on funktion $f(x)$ kuvaajan peilikuva suoran $y = x$ suhteen.

Vastaus

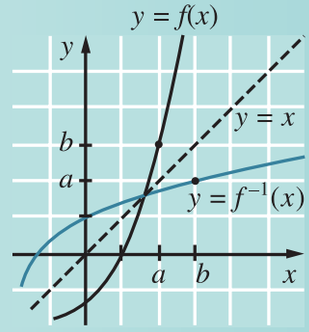
a) Käänteisfunktion määrittelyjoukko on $[-2, \infty[$.

b) $f^{-1}(y) = \sqrt{y + 2}$

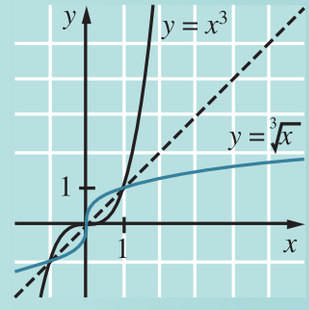
Käänteisfunktion kuvaaja

Jos funktion $f(x)$ käänteisfunktion f^{-1} muuttujana on x, niin funktion $f^{-1}(x)$ kuvaaja saadaan funktion $f(x)$ kuvaajasta vaihtamalla kuvaajan pisteiden x- ja y-koordinaatit keskenään.

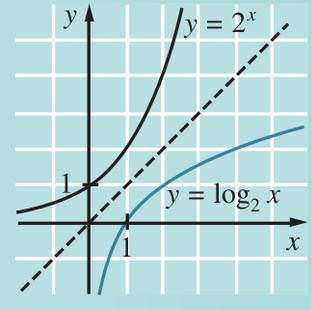
Käänteisfunktion $f^{-1}(x)$ kuvaaja on funktion $f(x)$ kuvaajan peilikuva suoran $y = x$ suhteen.



Kuutiojuurifunktio $\sqrt[3]{x}$ on funktion x^3 käänteisfunktio. Kuutiojuurifunktion kuvaaja on funktion x^3 kuvaajan peilikuva suoran $y = x$ suhteen.



Funktiolla $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x$, on käänteisfunktio $f^{-1}:]0, \infty[\to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \log_2 x$, sillä $y = 2^x$, kun $x = \log_2 y$. Funktion $\log_2 x$ kuvaaja on funktion 2^x kuvaajan peilikuva suoran $y = x$ suhteen.



ESIMERKKI 2

a) Osoita, että funktiolla $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^{2x} + 3x + 1$, on käänteisfunktio. Mikä käänteisfunktion määrittelyjoukko on?
b) Määritä käänteisfunktion f^{-1} nollakohta ja arvo kohdassa $e^2 + 4$.
c) Määritä kahden desimaalin tarkkuudella käänteisfunktion arvo $f^{-1}(0)$.

Ratkaisu

a) Koska

$f'(x) = 2e^{2x} + 3 > 0$ kaikilla x,

funktio f on kaikkialla aidosti kasvava. Siis funktiolla f on käänteisfunktio.

Koska $e^{2x} \to \infty$ ja $3x + 1 \to \infty$, kun $x \to \infty$, niin

$e^{2x} + 3x + 1 \to \infty$, kun $x \to \infty$.

Koska $e^{2x} \to 0$ ja $3x + 1 \to -\infty$, kun $x \to -\infty$, niin

$e^{2x} + 3x + 1 \to -\infty$, kun $x \to -\infty$.

Koska funktio f on jatkuva, se saa kaikki arvot kahden saamansa arvon välistä. Siis funktion f arvojoukko on koko reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$.

Käänteisfunktion f^{-1} määrittelyjoukko on reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$.

b) Koska

$f(0) = e^{2 \cdot 0} + 3 \cdot 0 + 1 = 1 + 1 = 2$,

niin $f^{-1}(2) = 0$.

Siis käänteisfunktion f^{-1} nollakohta on 2.

Huomataan, että

$f(1) = e^{2 \cdot 1} + 3 \cdot 1 + 1 = e^2 + 4$.

Siis $f^{-1}(e^2 + 4) = 1$.

c) On löydettävä likiarvo käänteisfunktion arvolle $f^{-1}(0)$ eli sellaiselle muuttujan arvolle x_0, että $f(x_0) = 0$.

Määritetään likiarvo haarukoimalla.

Koska $f(-1) = e^{-2} - 2 \approx -1{,}9 < 0$ ja $f(0) = 2 > 0$, niin x_0 on välillä $]-1, 0[$.

Kaventamalla väliä, jolla funktio f vaihtaa merkkiään, saadaan:*

$f(-0{,}47) \approx -0{,}019 < 0$,

$f(-0{,}46) \approx 0{,}019 > 0$, x_0 on välillä $]-0{,}47; -0{,}46[$.

$f(-0{,}465) \approx -0{,}00045 < 0$. x_0 on välillä $]-0{,}465; -0{,}46[$.

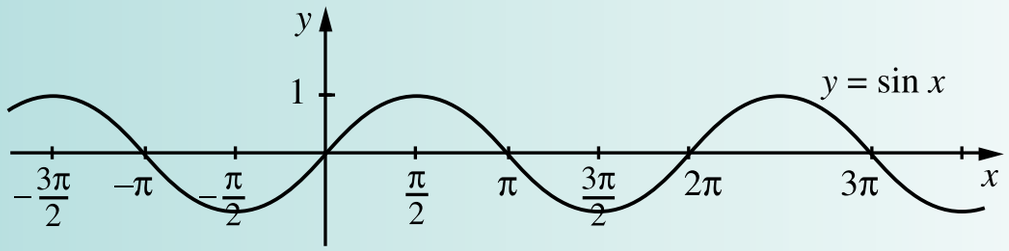
Kahden desimaalin tarkkuudella on $x_0 \approx -0{,}46$. Siis $f^{-1}(0) \approx -0{,}46$.

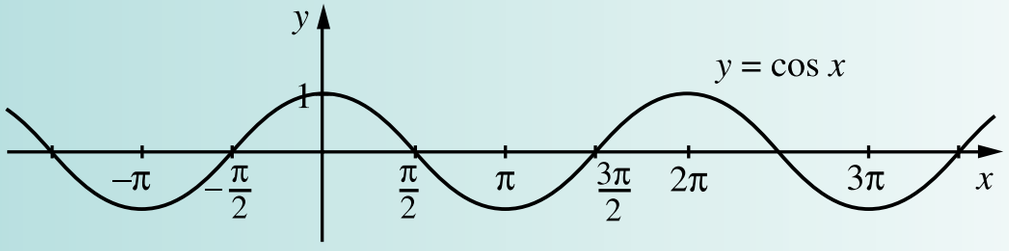
Vastaus

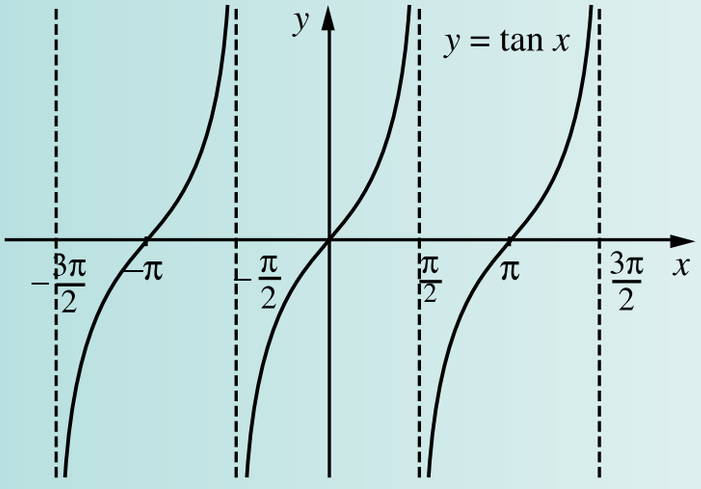
a) Käänteisfunktion määrittelyjoukko on $\mathbb{R}$.
b) nollakohta 2, $f^{-1}(e^2 + 4) = 1$
c) $f^{-1}(0) \approx -0{,}46$

* Haarukoitaessa joudutaan laskemaan lukuisia saman funktion arvoja. Funktio kannattaa näppäillä graafisen laskimen piirrettäväksi funktioksi ja käyttää laskimen toimintoa, jolla lasketaan funktion arvoja.

Trigonometriset funktiot $\sin x$, $\cos x$ ja $\tan x$ ovat kaikkea muuta kuin aidosti monotonisia. Ne saavat jokaisen arvonsa äärettömän monessa eri kohdassa.



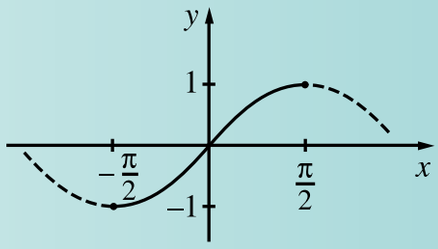




Sopiville väleille rajattuina funktiot kuitenkin ovat aidosti monotonisia, ja niille voidaan määritellä käänteisfunktio. Seuraavassa tutkitaan välille $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ rajattua sinifunktiota, välille $[0, \pi]$ rajattua kosinifunktiota ja välille $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ rajattua tangenttifunktiota.

Funktio arcsin *x*

Funktio $\sin x$ on aidosti kasvava välillä $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, joten tälle välille rajatulla sinifunktiolla $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ on käänteisfunktio.

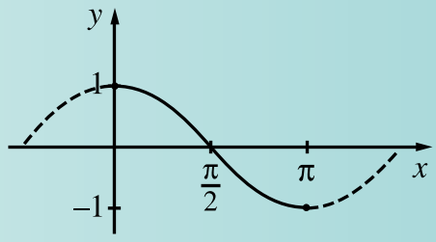


Käänteisfunktio on nimeltään *arkussini*, ja se merkitään $\arcsin x$.

Funktion $\arcsin x$ määrittelyjoukko on väli $[-1, 1]$ ja arvojoukko väli $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Funktio arccos *x*

Funktio $\cos x$ on aidosti vähenevä välillä $[0, \pi]$, joten tälle välille rajatulla kosinifunktiolla $\cos : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ on käänteisfunktio.

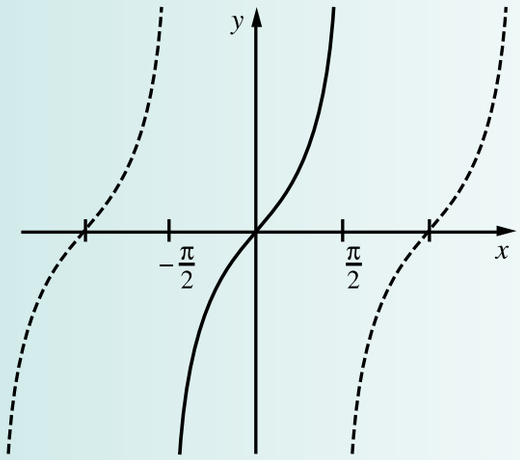


Käänteisfunktio on nimeltään *arkuskosini*, ja se merkitään $\arccos x$.

Funktion $\arccos x$ määrittelyjoukko on väli $[-1, 1]$ ja arvojoukko väli $[0, \pi]$.

Funktio arctan *x*

Funktio $\tan x$ on aidosti kasvava välillä $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, joten tälle välille rajatulla tangenttifunktiolla $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ on käänteisfunktio.



Käänteisfunktio on nimeltään *arkustangentti*, ja se merkitään $\arctan x$.

Funktion $\arctan x$ määrittelyjoukko on koko reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ ja arvojoukko väli $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Funktioita $\arcsin x$, $\arccos x$ ja $\arctan x$ kutsutaan *arkusfunktioiksi*. Etuliite arkus (arc) viittaa kaareen. Koska kulman suuruus radiaaneina on yksikköympyrän kaaren pituus, niin arkusfunktioiden arvojen määrittämisessä on kysymys oikean mittaisen ja oikean suuntaisen kaaren määrittämisestä.

Funktioita $\arcsin x$, $\arccos x$ ja $\arctan x$ merkitään joskus myös $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$ ja $\tan^{-1} x$. Funktioiden arvoja voi laskea laskimen näppäimillä [sin⁻¹], [cos⁻¹] ja [tan⁻¹].

ESIMERKKI 3

Määritä. a) $\arcsin \frac{1}{2}$ b) $\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ c) $\arctan(-1)$

Ratkaisu

a) Funktio $\arcsin x$ on välille $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ rajatun sinifunktion käänteisfunktio. Siis $\arcsin \frac{1}{2}$ on se välin $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ kulma, jonka sini on $\frac{1}{2}$. Koska

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

ja $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$, niin

$$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

b) Funktio $\arccos x$ on välille $[0, \pi]$ rajatun kosinifunktion käänteisfunktio. Siis $\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ on se välin $[0, \pi]$ kulma, jonka kosini on $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Koska

$$\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ja $0 < \frac{3\pi}{4} < \pi$, niin

$$\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

c) Funktio $\arctan x$ on välille $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ rajatun tangenttifunktion käänteisfunktio. Siis $\arctan(-1)$ on se välin $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ kulma, jonka tangentti on -1.

Koska

$$\tan(-\frac{\pi}{4}) = -1$$

ja $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$, niin

$$\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

Vastaus a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{3\pi}{4}$ c) $-\frac{\pi}{4}$ *

---

* Arkusfunktioiden tarkkoja arvoja voi löytää taulukkokirjoista ja laskea myös laskimella asettamalla laskin astetilaan. Tällöin esimerkiksi saadaan

$\cos^{-1}(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = 135°$. Kun kulma $135°$ ilmaistaan radiaaneina, saadaan

$\arccos(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{3\pi}{4}$.

TEHTÄVIÄ

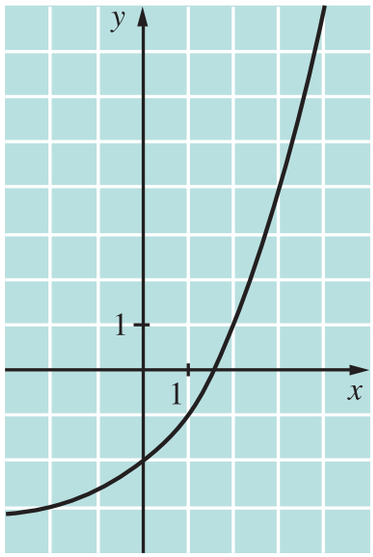
SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

124. Kuviossa on välillä $[-3, \infty[$ määritellyn aidosti kasvavan funktion f kuvaaja.

a) Määritä kuvaajasta funktion f käänteisfunktion f^{-1} arvot $f^{-1}(8)$, $f^{-1}(4)$, $f^{-1}(1)$, $f^{-1}(-1)$, $f^{-1}(-2)$ ja $f^{-1}(-3)$.

b) Määritä $f^{-1}(f(3))$ ja $f^{-1}(f(-1))$.

c) Määritä $f(f^{-1}(1))$ ja $f(f^{-1}(6))$.



125. a) Osoita, että funktiolla $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 4$, on käänteisfunktio. Mikä käänteisfunktion määrittelyjoukko on?

b) Määritä käänteisfunktion $f^{-1}(y)$ lauseke.

c) Piirrä samaan koordinaatistoon funktioiden $f(x)$ ja $f^{-1}(x)$ kuvaajat.

126. Mikä funktio on funktion

a) x^2, missä $x \geqslant 0$

b) x^2, missä $x \leqslant 0$

c) 3^x

d) $\lg x$, missä $x > 0$,

käänteisfunktio? Ilmoita myös käänteisfunktion määrittelyjoukko.

127. a) Osoita, että funktiolla $f: [0, \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4$, on käänteisfunktio. Mikä käänteisfunktion määrittelyjoukko on?

b) Määritä käänteisfunktion $f^{-1}(y)$ lauseke.

c) Piirrä funktion $f(x)$ ja käänteisfunktion $f^{-1}(x)$ kuvaajat.

128. Osoita, että funktiolla $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 6 - e^{-x}$, on käänteisfunktio. Mikä käänteisfunktion määrittelyjoukko on? Muodosta käänteisfunktion $f^{-1}(x)$ lauseke.

129. Määritä funktion $f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$, $x > 3$, käänteisfunktio f^{-1}. Millä välillä tämä on määritelty? Osoita laskemalla, että $f^{-1}(f(x)) = x$, kun $x > 3$. (Ylioppilaskoe, k. 2003)

130. a) Osoita, että funktiolla $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 + x^3 + x + 1$, on koko reaalilukujen joukossa määritelty käänteisfunktio.

b) Määritä käänteisfunktion arvot $f^{-1}(4)$ ja $f^{-1}(-2)$ ja käänteisfunktion nollakohta.

c) Määritä kahden desimaalin tarkkuudella käänteisfunktion arvo $f^{-1}(0)$.

131. Määritä.

a) $\arcsin 1$ b) $\arccos 1$ c) $\arctan 1$

132. Määritä.

a) $\arcsin(-1)$ b) $\arccos(-1)$ c) $\arctan(-1)$

133. Määritä.

a) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$ b) $\arccos\frac{1}{2}$ c) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$

134. Funktio $\cos x$ on aidosti kasvava välillä $[-\pi, 0]$ ja välillä $[\pi, 2\pi]$, joten näille väleille rajatulla kosinifunktiolla on käänteisfunktio. Ilmaise funktion $\arccos x$ avulla välille
a) $[-\pi, 0]$ b) $[\pi, 2\pi]$ rajatun kosinifunktion käänteisfunktio.

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

135. Osoita, että funktiolla $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -3x + 6$, on koko reaalilukujen joukossa määritelty käänteisfunktio. Muodosta käänteisfunktion $f^{-1}(x)$ lauseke. Tarkista sieventämällä lausekkeet $f(f^{-1}(x))$ ja $f^{-1}(f(x))$. Piirrä funktioiden $f(x)$ ja $f^{-1}(x)$ kuvaajat.

136. Osoita, että funktiolla $f:]1, \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = 2\ln(x - 1)$, on käänteisfunktio. Mikä käänteisfunktion määrittelyjoukko on? Määritä käänteisfunktion lauseke.

137. Osoita, että funktiolla $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \cos x$, on koko reaalilukujen joukossa määritelty käänteisfunktio. Määritä käänteisfunktion arvot $f^{-1}(1)$, $f^{-1}(\frac{\pi}{2})$ ja $f^{-1}(\pi - 1)$ sekä kaksidesimaalinen likiarvo arvolle $f^{-1}(2)$.

138. Osoita, että funktiolla $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x^2 + x + 2$, on koko reaalilukujen joukossa määritelty käänteisfunktio. Määritä käänteisfunktion arvot $f^{-1}(3)$ ja $f^{-1}(8)$. Missä kohdassa käänteisfunktio saa arvon 10?

139. Määritä mahdollisimman suuri sellainen origon sisältävä väli A, että funktiolla

$f: A \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}xe^{\frac{1}{2}x}$, on käänteisfunktio.

Mikä käänteisfunktion määrittelyjoukko on? Määritä funktioiden $f(x)$ ja $f^{-1}(x)$ kuvaajien leikkauspisteet ja piirrä funktioiden kuvaajat.

140. Määritä.
a) $\arcsin 0$ b) $\arccos 0$ c) $\arctan 0$

141. Määritä. a) $\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2})$

b) $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})$ c) $\arcsin(-\frac{1}{\sqrt{2}})$

142. Funktio $\sin x$ on aidosti vähenevä välillä $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ ja aidosti kasvava välillä $[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$, joten näille väleille rajatulla sinifunktiolla on käänteisfunktio. Käytä hyväksi sinifunktion ominaisuuksia ja kuvaajaa ja ilmaise funktion $\arcsin x$ avulla välille a) $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

b) $[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$ rajatun sinifunktion käänteisfunktio.

143. Määritä $\arcsin(\sin x)$, kun

a) $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ b) $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$

c) $\frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{2}$.

144. Ilmaise funktio $\arccos(\cos x)$ paloittain määriteltynä funktiona välillä $[0, 4\pi]$ ja piirrä funktion kuvaaja.

145. Funktio $f: [1, \infty[\to \mathbb{R}$ on ei-negatiivinen ja toteuttaa yhtälön $x + f(x) = e^{f(x)}$.
a) Määritä $f(e - 1)$ ja $f(1)$.
b) Piirrä käänteisfunktion f^{-1} kuvaaja ja sen avulla funktion f kuvaaja.
(Ylioppilaskoe, s. 1996)

Käänteisfunktion derivaatta

Oletetaan, että funktio $f: A \to \mathbb{R}$ on aidosti monotoninen ja derivoituva. Tällöin funktiolla f on käänteisfunktio $f^{-1} : B \to \mathbb{R}$, missä B on funktion f arvojoukko. Seuraavassa johdetaan kaava, jolla voidaan määrittää käänteisfunktion derivaatta. Käänteisfunktion derivoituvuutta ei perustella.

Funktio f ja käänteisfunktio f^{-1} kumoavat toisensa:

$f(f^{-1}(x)) = x.$

Siis funktio $f(f^{-1}(x))$ ja funktio x ovat sama funktio, joten niillä on sama derivaattafunktio. Derivoidaan molemmat funktiot.

$$\mathrm{D}f(f^{-1}(x)) = \mathrm{D}x$$

Yhdistetyn funktion $f(f^{-1}(x))$ derivaatta on ulkofunktion f derivaatta kohdassa $f^{-1}(x)$ kerrottuna sisäfunktion derivaatalla $(f^{-1})'(x)$.

$$f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) = 1 \qquad \big| : f'(f^{-1}(x)) \neq 0$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Käänteisfunktion derivointikaava

Derivoituvan funktion f käänteisfunktio f^{-1} on derivoituva jokaisessa kohdassa x, jossa $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$, ja

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Kohdat, joissa käänteisfunktio f^{-1} ei ole derivoituva, ovat sellaiset kohdat, joissa käänteisfunktion arvo on funktion f derivaattafunktion f' nollakohta.

ESIMERKKI 1

Derivoi funktio $\sqrt{x}$ käänteisfunktion derivointikaavan avulla.

Ratkaisu

Neliöjuurifunktio on funktion $f\colon [0, \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, käänteisfunktio.

Funktion $f(x) = x^2$ derivaattafunktio on $f'(x) = 2x$.

Käänteisfunktion $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ derivaattafunktio on

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \qquad f'(x) = 2x$$

$$= \frac{1}{2f^{-1}(x)} \qquad f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}, \text{ missä } x \neq 0.$$

Vastaus

$$\mathrm{D}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ESIMERKKI 2

a) Osoita, että funktiolla $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 3$ on käänteisfunktio.
b) Määritä käänteisfunktion f^{-1} derivaatta kohdassa 10.
c) Missä kohdissa käänteisfunktio f^{-1} ei ole derivoituva?

Ratkaisu

a) Derivoidaan funktio f.

$f'(x) = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x^2 + 2x + 1) = 3(x + 1)^2$

Siis $f'(x) \geqslant 0$ kaikilla x ja $f'(x) = 0$ vain kohdassa $x = -1$.*
Funktio f on aidosti kasvava, joten sillä on käänteisfunktio.

Koska $f(x) \to -\infty$, kun $x \to -\infty$, ja $f(x) \to \infty$, kun $x \to \infty$, käänteisfunktion määrittelyjoukko on koko reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$.

---

* Voidaan myös ratkaista derivaattafunktion $f'(x) = 3x^2 + 6x + 3$ nollakohta $x = -1$ ja perustella paraabelikuvion avulla, että $f'(x) \geqslant 0$ kaikilla x.

b) Käänteisfunktion f^{-1} derivaatta kohdassa 10 on

$$(f^{-1})'(10) = \frac{1}{f'(f^{-1}(10))},$$

missä $f'(x) = 3x^2 + 6x + 3$.

Huomataan, että $f(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 3 = 10$, joten $f^{-1}(10) = 1$.

Siis

$$f'(f^{-1}(10)) = f'(1) = 3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 + 3 = 12$$

ja

$$(f^{-1})'(10) = \frac{1}{f'(f^{-1}(10))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{12}.$$

c) Käänteisfunktio f^{-1} ei ole derivoituva kohdissa x, joissa $f'(f^{-1}(x)) = 0$, eli kohdissa, joissa käänteisfunktion arvo on derivaattafunktion f' nollakohta.

Derivaattafunktion $f'(x) = 3x^2 + 6x + 3$ ainoa nollakohta on -1.
Lasketaan funktion f arvo kohdassa -1.

$$f(-1) = (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 3 = -1 + 3 - 3 + 3 = 2$$

Koska

$f(-1) = 2$,

niin

$f^{-1}(2) = -1$.

Käänteisfunktio f^{-1} ei ole derivoituva kohdassa 2.

Vastaus

b) $(f^{-1})'(10) = \frac{1}{12}$

c) kohdassa $x = 2$

ESIMERKKI 3

Derivoi funktio $\arcsin x$.

Ratkaisu

Arkussinifunktio on funktion $f\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x$, käänteisfunktio. Koska $f'(x) = \cos x$, niin käänteisfunktion $f^{-1}(x) = \arcsin x$ derivaattafunktio on

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \qquad f'(x) = \cos x$$

$$= \frac{1}{\cos\,(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}.$$

Lauseketta voidaan yksinkertaistaa:

Koska $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, niin aina on

$$\cos t = \sqrt{1 - (\sin t)^2} \quad \text{tai} \quad \cos t = -\sqrt{1 - (\sin t)^2}.$$

Funktion $\arcsin x$ kaikki arvot ovat välillä $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Tällä välillä kosinifunktion arvot ovat epänegatiivisia, joten

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - (\sin(\arcsin x))^2}.$$

Koska funktio $\arcsin x$ on funktion $\sin x$ käänteisfunktio, niin

$$\sin(\arcsin x) = x.$$

Siis

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$$

ja

$$\mathrm{D}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \text{ missä } -1 < x < 1.$$

Vastaus

$$\mathrm{D}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \text{ missä } -1 < x < 1$$

Arkusfunktioiden derivointikaavat

Arkusfunktioiden derivaattafunktiot ovat:

$$\mathrm{D}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ missä } -1 < x < 1,$$

$$\mathrm{D}\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ missä } -1 < x < 1,$$

$$\mathrm{D}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}.$$

Arkussinin derivointikaava johdettiin edellisessä esimerkissä 3. Arkuskosinin ja arkustangentin derivointikaavojen johtaminen on tehtävinä 159 ja 150.

ESIMERKKI 4

Derivoi funktio a) $\arcsin 3x$ b) $\arctan \frac{x}{5}$.

Ratkaisu

Käytetään yhdistetyn funktion derivointisääntöä

$\mathrm{D}g(f(x)) = g'(f(x))f'(x)$. Ulkofunktion g derivaatta kohdassa $f(x)$ kerrottuna sisäfunktion derivaatalla $f'(x)$.

a) Koska $\mathrm{D}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, niin

$$\mathrm{D}\arcsin 3x = \frac{1}{\sqrt{1-(3x)^2}} \cdot \mathrm{D}3x$$

Ulkofunktion $\arcsin x$ derivaatta kohdassa $3x$ kerrottuna sisäfunktion derivaatalla $\mathrm{D}3x$.

$$= \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}} \cdot 3 = \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}.$$

b) Koska $\mathrm{D}\arctan x = \dfrac{1}{1+x^2}$, niin

$$\mathrm{D}\arctan\frac{x}{5} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{5}\right)^2} \cdot \mathrm{D}\frac{x}{5}$$

Ulkofunktion $\arctan x$ derivaatta kohdassa $\frac{x}{5}$ kerrottuna sisäfunktion derivaatalla $\mathrm{D}\frac{x}{5}$.

$$= \frac{1}{1+\frac{x^2}{25}} \cdot \frac{1}{5}$$

$$= \frac{25}{25+x^2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{5}{25+x^2}.$$

Vastaus a) $\dfrac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$ b) $\dfrac{5}{25+x^2}$

TEHTÄVIÄ

SARJA I.
PERUSTEHTÄVIÄ

146. Käytä hyväksi derivointikaavaa $Dx^3 = 3x^2$ ja käänteisfunktion derivoimissääntöä ja derivoi funktio $\sqrt[3]{x}$.

147. Osoita, että funktiolla $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 + x^3 + x + 1$, on käänteisfunktio. Määritä käänteisfunktion f^{-1} derivaatta kohdissa 4, 1 ja -2. Onko käänteisfunktiolla derivaatta määrittelyjoukkonsa jokaisessa pisteessä?

148. Osoita, että funktiolla $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 2$, on käänteisfunktio. Mikä käänteisfunktion f^{-1} määrittelyjoukko on? Määritä käänteisfunktion arvo ja derivaatta kohdissa -2 ja 5. Missä kohdissa käänteisfunktio f^{-1} ei ole derivoituva?

149. Funktio f määritellään kaavalla $f(x) = x + \sin x$.
a) Osoita, että f on aidosti kasvava.
b) Määritä käänteisfunktion derivaatta $(f^{-1})'\left(\frac{3\pi - 2}{2}\right)$. (Ylioppilaskoe, s. 1990)

150. Johda funktion $\arctan x$ derivointikaava $D \arctan x = \frac{1}{1 + x^2}$. Funktion $\tan x$ derivaatta on $D \tan x = 1 + \tan^2 x$.

151. Ilmoita funktion määrittelyjoukko ja derivoi funktio.

a) $\arccos \frac{x}{3}$ b) $\arctan 5x$ c) $\arcsin (1 - x)$

152. Osoita, että funktio

$x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2)$ on funktion $\arctan x$ integraalifunktio.

153. Määritä funktion

$f(x) = 2 \arctan x - \ln(1 + x^2)$ suurin arvo ja pienin arvo.

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

154. Käytä hyväksi derivointikaavaa $Dx^4 = 4x^3$ ja käänteisfunktion derivoimissääntöä ja derivoi funktio $\sqrt[4]{x}$.

155. Osoita, että funktiolla $f:]0, \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 6 \ln x - \frac{9}{x}$, on käänteisfunktio. Määritä käänteisfunktion derivaatta $(f^{-1})'(-8)$.

156. Funktio f määritellään seuraavasti:

$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$, kun $x > 0$. Osoita, että käänteisfunktio f^{-1} on olemassa, ja määritä $(f^{-1})'(0)$. (Ylioppilaskoe, s. 1981)

157. Osoita, että funktiolla $f(x) = (x^2 + 1)e^{-x}$ on käänteisfunktio. Määritä $(f^{-1})'(1)$. Missä kohdissa käänteisfunktio f^{-1} ei ole derivoituva?

158. Osoita, että funktiolla $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - \sin x + 1$, on käänteisfunktio f^{-1}. Mikä käänteisfunktion määrittelyjoukko on? Määritä käänteisfunktion derivaatta kohdissa $(2n + 1)\pi + 1$, missä n on kokonaisluku. Missä kohdissa käänteisfunktio f^{-1} ei ole derivoituva?

159. Johda funktion $\arccos x$ derivointikaava

$$\mathrm{D}\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

160. Laske funktion $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2\arccos x - \arctan 2x$, arvo ja derivaatta kohdassa $\frac{1}{2}$.

161. Osoita, että funktio $x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$ on funktion $\arcsin x$ integraalifunktio.

162. Määritä funktion

$$f(x) = 2\sqrt{1 - x^2} - \arcsin x$$

suurin arvo.

163. Mikä funktion $f(x) = \arcsin x - \ln x$ määrittelyjoukko on? Määritä funktion pienin arvo.

164. Olkoon $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1 - x}{1 + x}$. Laske funktion derivaatta. Laske likiarvot funktion arvoille $f(-2)$ ja $f(2)$. Piirrä funktion kuvaaja. (Ylioppilaskoe, k. 2006)

Integraalifunktio ja määrätty integraali

KERTAUSESIMERKKI 1

Osoita, että funktio $g(x) = \frac{3}{2}\ln(1 + x^2) - 4 \arctan x$ on funktion $f(x) = \frac{3x - 4}{1 + x^2}$ integraalifunktio. Määritä funktion f kaikki integraalifunktiot.

Ratkaisu

Molempien funktioiden g ja f määrittelyjoukko on koko reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$.

Derivoidaan funktio g.

$$g'(x) = \frac{3}{2} \cdot \frac{2x}{1 + x^2} - 4 \cdot \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\mathrm{D}\ln f(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \text{ ja}$$

$$\mathrm{D}\arctan x = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$= \frac{3x}{1 + x^2} - \frac{4}{1 + x^2} = \frac{3x - 4}{1 + x^2}$$

Koska $g'(x) = f(x)$ kaikilla x, funktio g on funktion f integraalifunktio.

Funktion f kaikki integraalifunktiot ovat funktiot

$$\frac{3}{2}\ln(1 + x^2) - 4 \arctan x + C,$$

missä C on vakio.

Vastaus

kaikki integraalifunktiot $\frac{3}{2}\ln(1 + x^2) - 4 \arctan x + C$, C vakio

Integraalifunktio

Funktio F on funktion f *integraalifunktio*, jos jokaisessa funktion f määrittelyjoukon pisteessä on $F'(x) = f(x)$.

Voidaan todistaa:

Integraalifunktion olemassaololause. Jokaisella jatkuvalla funktiolla on integraalifunktio.*

Jatkuvuus ei ole välttämätön ehto integraalifunktion olemassaololle. Myös epäjatkuvalla funktiolla saattaa olla integraalifunktio. Esimerkki tällaisesta funktiosta on tehtävässä 188.

Jos funktio F on funktion f integraalifunktio, niin jokainen funktio $F + C$, missä C on vakio, on myös funktion f integraalifunktio.

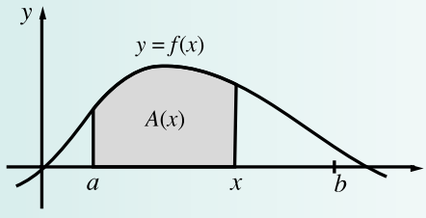
Kurssissa Integraalilaskenta todistettiin integraalilaskennan peruslauseen avulla, että jos funktion f määrittelyjoukko on väli, niin kaikki integraalifunktiot saadaan lisäämällä vakio yhteen integraalifunktioon. Siis:

Jos funktion f määrittelyjoukko on väli ja F on funktion f jokin integraalifunktio, niin funktio G on funktion f integraalifunktio, jos ja vain jos $G = F + C$, missä C on vakio.

Kaikkien integraalifunktioiden määrittämistä kutsutaan *integroimiseksi*.

---

* Lause on yleistys havainnolle, joka tehtiin kurssissa Integraalilaskenta. Jos f on epänegatiivinen jatkuva funktio ja $A(x)$ funktioon f liittyvä pinta-alafunktio eli funktio, jonka arvo on funktion f kuvaajan ja x-akselin välillä $[a, x]$ rajaama pinta-ala, niin $A'(x) = f(x)$. Siis $A(x)$ on funktion f integraalifunktio.



Pinta-alafunktio voidaan yleistää myös sellaisille funktioille, jotka eivät ole epänegatiivisia, ja näin saadaan integraalifunktio mille tahansa jatkuvalle funktiolle. Pinta-alan, määrätyn integraalin ja integraalifunktion yhteyttä on käsitelty kirjan Integraalilaskenta luvussa Integraalilaskennan teoriaa.

Yksinkertaistenkin funktioiden integroiminen saattaa olla hankalaa, ja monien tavallisten funktioiden integraalifunktioita ei ole edes mahdollista ilmaista tavallisten funktioiden avulla. Tällaisia funktioita ovat esimerkiksi funktiot e^{x^2}, $\frac{e^x}{x}$, $\frac{\sin x}{x}$ ja $\frac{1}{\ln x}$.

ESIMERKKI 2

a) Integroi funktio $f(x) = |2x - 6|$.
b) Määritä funktion $f(x) = |2x - 6|$ integraalifunktio, jonka kuvaaja kulkee pisteen $(4, 5)$ kautta.
c) Piirrä samaan koordinaatistoon b-kohdan integraalifunktion ja funktion f kuvaajat.

Ratkaisu

a) Funktio f on jatkuvan funktion itseisarvona jatkuva koko reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$, joten funktiolla f on integraalifunktio.

Tehtävänä on määrittää funktion f kaikki integraalifunktiot.

Ilmaistaan funktio $f(x) = |2x - 6|$ paloittain määriteltynä funktiona:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 6, \text{ kun } x < 3 \\ 2x - 6, \text{ kun } x \geqslant 3. \end{cases}$$

Välillä $]-\infty, 3[$ funktion f jokainen integraalifunktio saadaan lisäämällä vakio yhteen funktion $-2x + 6$ integraalifunktioon. Samoin välillä $[3, \infty[$ funktion f jokainen integraalifunktio saadaan lisäämällä vakio yhteen funktion $2x - 6$ integraalifunktioon. Siis kaikki funktion f integraalifunktiot ovat muotoa

$$F(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x + C, \text{ kun } x < 3 \\ x^2 - 6x + D, \text{ kun } x \geqslant 3. \end{cases}$$

Koska funktio F on funktion f integraalifunktio, funktio F on derivoituva kohdassa 3. Koska F on derivoituva kohdassa 3, niin F on jatkuva kohdassa 3.

Määritetään yhteys vakioiden C ja D välille käyttämällä hyväksi jatkuvuutta kohdassa 3.

Funktio F on oikeanpuoleisesti jatkuva kohdassa 3 ja

$F(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + D = -9 + D.$

Funktio F on vasemmanpuoleisesti jatkuva kohdassa 3, jos

$$\lim_{x \to 3-} F(x) = -9 + D.$$

Koska

$$\lim_{x \to 3-} F(x) = -3^2 + 6 \cdot 3 + C = 9 + C,$$

tulee olla

$-9 + D = 9 + C$

$D = 18 + C.$

Siis funktion f kaikki integraalifunktio ovat muotoa

$$F(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x + C & , \text{kun } x < 3 \\ x^2 - 6x + 18 + C, & \text{kun } x \geqslant 3. \end{cases}^*$$

---

* Olisi siis virhe integroida paloittain käyttäen samaa vakiota:

$$F(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x + C, & \text{kun } x < 3 \\ x^2 - 6x + C, & \text{kun } x \geqslant 3. \end{cases}$$

Näin saadut funktiot eivät ole välttämättä jatkuvia kohdassa 3. Esimerkiksi C:n arvolla 0 saatava funktio

$$F(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x, & \text{kun } x < 3 \\ x^2 - 6x, & \text{kun } x \geqslant 3 \end{cases}$$

ei ole jatkuva kohdassa 3, sillä $\lim_{x \to 3-} F(x) = 9$ ja $F(3) = -9$.

b) On määritettävä funktion $f(x) = |2x - 6|$ integraalifunktio F, jonka arvo kohdassa 4 on 5. Kun $x > 3$, niin $F(x) = x^2 - 6x + 18 + C$, joten tulee olla:

$$4^2 - 6 \cdot 4 + 18 + C = 5$$

$$16 - 24 + 18 + C = 5$$

$$C = -5.$$

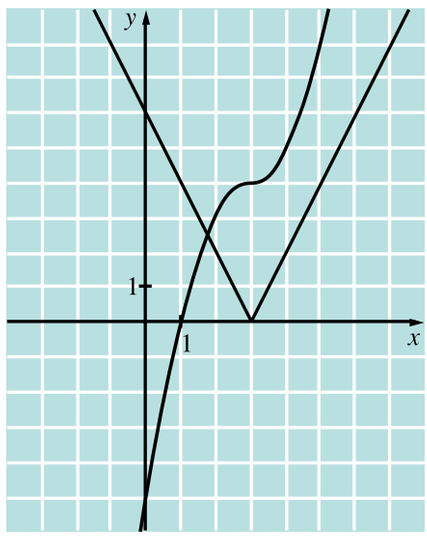
Siis kysytty integraalifunktio on

$$F(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x - 5 & , \text{kun } x < 3 \\ x^2 - 6x + 18 - 5, & \text{kun } x \geqslant 3 \end{cases}$$

eli

$$F(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x - 5 & , \text{kun } x < 3 \\ x^2 - 6x + 13, & \text{kun } x \geqslant 3. \end{cases}$$

c) Kuviossa on funktion $f(x) = |2x - 6|$ kuvaaja ja pisteen (4, 5) kautta kulkevan integraalifunktion kuvaaja. Integraalifunktion kuvaaja muodostuu kahdesta paraabelin haarasta, jotka liittyvät sulavasti (derivoituvasti) yhteen muuttujan arvon 3 kohdalla.



Vastaus

a) Funktion f kaikki integraalifunktiot ovat funktiot

$$F(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x + C & , \text{kun } x < 3 \\ x^2 - 6x + 18 + C, & \text{kun } x \geqslant 3, \end{cases}$$

missä C on vakio.

b)

$$F(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x - 5 & , \text{kun } x < 3 \\ x^2 - 6x + 13, & \text{kun } x \geqslant 3 \end{cases}$$

JOHDANTOESIMERKKI 3

Olkoon $g(x)$ funktion $f(t) = t + 3$ määrätty integraali 1:stä x:ään. Derivoi funktio $g(x)$.

Ratkaisu

$$g(x) = \int_1^x (t + 3)\mathrm{d}t = \Big/_1^x \left(\frac{1}{2}t^2 + 3t\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}x^2 + 3x\right) - \left(\frac{1}{2} \cdot 1^2 + 3 \cdot 1\right) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{7}{2}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x + 3 \cdot 1 - 0 = x + 3$$

Siis $g'(x) = f(x)$.

Vastaus $g'(x) = f(x)$

Edellisen esimerkin havainto pätee kaikille jatkuville funktioille.

Oletetaan, että funktio f on jatkuva välillä A. Olkoon a jokin välin A piste. Tällöin

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

on välillä A määritelty muuttujan x funktio. Funktion arvo kohdassa x on funktion f määrätty integraali a:sta x:ään.

Määrätyn integraalin derivaattalause. Muuttujan x funktion $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ derivaattafunktio on $f(x)$ eli

$$\mathrm{D}_x \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x).$$

Merkinnällä D_x on korostettu, että derivoidaan funktiota, jonka muuttuja on x.

Siis kun jatkuvan funktion f määrätty integraali derivoidaan ylärajan suhteen, derivaattafunktio on f.

Perustelu. Olkoon funktio F funktion f jokin integraalifunktio. Tällöin

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \Big/_a^x F(t) = F(x) - F(a)$$

ja

$$\mathrm{D}_x \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{D}(F(x) - F(a)) = \mathrm{D}F(x) - \mathrm{D}F(a) \qquad \mathrm{D}F = f$$
$$= f(x) - 0 = f(x). \ \square$$

ESIMERKKI 4

Derivoi funktio $f(x) = \int_5^x \sqrt{1 + t^2}\ \mathrm{d}t$.

Ratkaisu Määrätyn integraalin derivaattalauseen nojalla

$$f'(x) = \mathrm{D}_x \int_5^x \sqrt{1 + t^2}\ \mathrm{d}t \qquad \mathrm{D}_x \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x)$$
$$= \sqrt{1 + x^2}\,.$$

Vastaus $f'(x) = \sqrt{1 + x^2}$

ESIMERKKI 5

Halutaan tehdä 10 cm korkea pyörähdyskappaleen muotoinen malja, jonka tilavuus on 0,5 litraa ja jolla on seuraava ominaisuus: maljassa olevan nesteen määrä on suoraan verrannollinen nestekerroksen korkeuden neliöön. Määritä jatkuva funktio $g : [0, 10] \to \mathbb{R}$, jonka kuvaajan pyörähtäessä x-akselin ympäri muodostuu tällainen malja.

Ratkaisu

Nesteen määrän (cm^3) riippuvuus nestekerroksen korkeudesta x (cm) on muotoa kx^2, missä k on verrannollisuuskerroin.

Ratkaistaan verrannollisuuskerroin k.

Kun nestekerroksen korkeus on 10 cm, niin nesteen määrä on $500\ \text{cm}^3$:

$$k \cdot 10^2 = 500$$

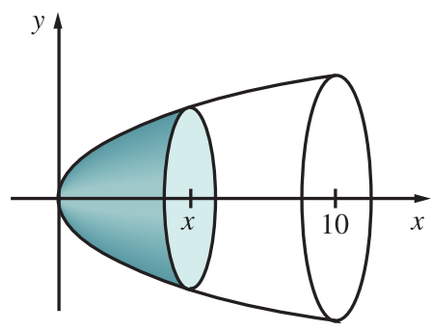
$$100k = 500 \qquad | : 100$$

$$k = 5.$$

Siis kun nestekerroksen korkeus on x (cm), nesteen määrä on $5x^2$ (cm^3).

Nestekerros, jonka korkeus on x, muodostuu, kun funktion g kuvaajan välillä $[0, x]$ oleva osa pyörähtää x-akselin ympäri. Muodostuvan pyörähdyskappaleen tilavuus on

$$\pi \int_0^x g(t)^2 \, \mathrm{d}t.$$



Siis kaikilla muuttujan x arvoilla välillä $[0, 10]$ tulee olla

$$\pi \int_0^x g(t)^2 \, \mathrm{d}t = 5x^2$$

eli

$$\int_0^x g(t)^2 \,\mathrm{d}t = \frac{5}{\pi}x^2.$$

Molemmat funktiot $\int_0^x g(t)^2 \,\mathrm{d}t$ ja $\frac{5}{\pi}x^2$ saavat saman arvon nolla kohdassa $x = 0$, joten integraalilaskennan peruslauseen nojalla ne ovat sama funktio, jos ja vain jos niillä on sama derivaattafunktio.

Derivoidaan molemmat funktiot.

$$\mathrm{D}_x \int_0^x g(t)^2 \,\mathrm{d}t = \mathrm{D}\frac{5}{\pi}x^2 \qquad \mathrm{D}_x \int_a^x f(t) \,\mathrm{d}t = f(x)$$

$$g(x)^2 = \frac{5}{\pi} \cdot 2x \qquad \text{Ratkaistaan funktio } g.$$

$$g(x) = \sqrt{\frac{10}{\pi}x} \quad \text{tai} \quad g(x) = -\sqrt{\frac{10}{\pi}x}$$

Funktioiden $\sqrt{\frac{10}{\pi}x}$ ja $-\sqrt{\frac{10}{\pi}x}$ kuvaajat ovat toistensa peilikuvat x-akselin suhteen, joten ne muodostavat pyörähtäessään saman kappaleen.

Vastaus $g(x) = \sqrt{\frac{10}{\pi}x}$ tai $g(x) = -\sqrt{\frac{10}{\pi}x}$ *

---

* Käyrät $y = \sqrt{\frac{10}{\pi}x}$ ja $y = -\sqrt{\frac{10}{\pi}x}$ ovat oikealle aukeavan paraabelin $x = \frac{\pi}{10}y^2$ haarat, joten muodostuva kappale on pyörähdysparaboloidi.

ESIMERKKI 6

Derivoi funktio. a) $g(x) = \int_x^{-3} \sqrt{1+t^2}\ \mathrm{d}t$ b) $h(x) = \int_x^{5x} \sqrt{1+t^2}\ \mathrm{d}t$

Ratkaisu

a) *Tapa 1.* Vaihdetaan integraalin ylä- ja alaraja keskenään. Tällöin määrätty integraali muuttuu vastaluvukseen.

$$g(x) = \int_x^{-3} \sqrt{1+t^2}\ \mathrm{d}t = -\int_{-3}^{x} \sqrt{1+t^2}\ \mathrm{d}t$$

Siis

$$g'(x) = \mathrm{D}_x\left(-\int_{-3}^{x} \sqrt{1+t^2}\ \mathrm{d}t\right) = -\mathrm{D}_x \int_{-3}^{x} \sqrt{1+t^2}\ \mathrm{d}t \qquad \mathrm{D}_x \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x)$$

$$= -\sqrt{1+x^2}.$$

Tapa 2. Lasketaan kuten määrätyn integraalin derivaattalauseen perustelussa.

Olkoon F funktion $f(t) = \sqrt{1+t^2}$ jokin integraalifunktio. Tällöin

$$g(x) = \int_x^{-3} \sqrt{1+t^2}\ \mathrm{d}t = \Big/_x^{-3} F(t) = F(-3) - F(x)$$

ja

$$g'(x) = \mathrm{D}(F(-3) - F(x)) = \mathrm{D}F(-3) - \mathrm{D}F(x) \qquad \mathrm{D}F = f$$

$$= 0 - f(x) = -\sqrt{1+x^2}.$$

Siis kun funktion f määrätty integraali derivoidaan alarajan suhteen, derivaattafunktio on $-f$.

b) *Tapa 1*. Valitaan funktion $\sqrt{1 + t^2}$ määrittelyjoukosta jokin luku, esimerkiksi 1.

Tällöin

$$h(x) = \int_x^{5x} \sqrt{1 + t^2}\ \mathrm{d}t$$

$$= \int_x^1 \sqrt{1 + t^2}\ \mathrm{d}t + \int_1^{5x} \sqrt{1 + t^2}\ \mathrm{d}t.$$

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Koska

$$\mathrm{D}_x \int_x^1 \sqrt{1 + t^2}\ \mathrm{d}t = -\sqrt{1 + x^2}$$

ja

$$\mathrm{D}_x \int_1^{5x} \sqrt{1 + t^2}\ \mathrm{d}t = \sqrt{1 + (5x)^2} \cdot \mathrm{D}5x$$

Ulkofunktion $\int_1^x \sqrt{1 + t^2}\ \mathrm{d}t$ derivaatta $\sqrt{1 + x^2}$ kohdassa $5x$ kerrottuna sisäfunktion $5x$ derivaatalla.

$$= 5\sqrt{1 + 25x^2},$$

niin

$$h'(x) = -\sqrt{1 + x^2} + 5\sqrt{1 + 25x^2}.$$

Tapa 2. Lasketaan kuten määrätyn integraalin derivaattalauseen perustelussa.

Olkoon F funktion $f(t) = \sqrt{1 + t^2}$ jokin integraalifunktio. Tällöin

$$h(x) = \int_x^{5x} \sqrt{1 + t^2}\, \mathrm{d}t = \Big/_x^{5x} F(t) = F(5x) - F(x)$$

ja

$$\begin{aligned} h'(x) &= \mathrm{D}(F(5x) - F(x)) = \mathrm{D}F(5x) - \mathrm{D}F(x) \\ &= f(5x) \cdot \mathrm{D}5x - f(x) \\ &= \sqrt{1 + (5x)^2} \cdot 5 - \sqrt{1 + x^2} \\ &= 5\sqrt{1 + 25x^2} - \sqrt{1 + x^2}\,. \end{aligned}$$

Yhdistetyn funktion $F(3x)$ derivaatta on ulkofunktion F derivaatta f kohdassa $5x$ kerrottuna sisäfunktion $5x$ derivaatalla.

Vastaus a) $-\sqrt{1 + x^2}$ b) $5\sqrt{1 + 25x^2} - \sqrt{1 + x^2}$

TEHTÄVIÄ

SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

165. Osoita, että funktio $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \ln(x^2 + 1) - \arctan x$, on funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x^2 + 1}$, integraalifunktio. Määritä edelleen funktion f kaikki integraalifunktiot.

166. Määritä funktion

$$f(x) = \begin{cases} x\ , \text{kun } x < 1 \\ x^2, \text{kun } x \geqslant 1 \end{cases}$$

kaikki integraalifunktiot.

167. Määritä funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1\ \ \ \ \ , \text{kun } x < 1 \\ 2x - 1, \text{kun } x \geqslant 1 \end{cases}$$

integraalifunktio F, jonka kuvaaja kulkee pisteen $(0, -1)$ kautta.

168. Määritä se funktion $f : f(x) = |x - 1|$ integraalifunktio F, jolle $F(-1) = 0$. Piirrä funktioiden f ja F kuvaajat. (Ylioppilaskoe, k. 1988)

169. Määritä funktion $f(x) = e^{-|x|}$ integraalifunktio F, jonka kuvaaja kulkee origon kautta.

170. Paloittain määriteltyjen funktioiden määrättyjä integraaleja on laskettu jo kurssissa Integraalilaskenta.

Laske $\displaystyle\int_0^2 (x^2 - x + |x - 1|)\mathrm{d}x$.

171. Derivoi funktio.

a) $\displaystyle f(x) = \int_3^x (t^2 + 1)^3\ \mathrm{d}t$ b) $\displaystyle g(x) = \int_{-1}^x e^{-t^2}\ \mathrm{d}t$

172. Määritä funktion

$$f : f(x) = \int_0^x (t^2 - 5t + 6)\mathrm{d}t$$

derivaatan nollakohdat. (Ylioppilaskoe, k. 1986)

173. Käyrä $y = f(x)$, $x \in [0, 1]$, $f(x) \geqslant 0$, pyörähtää x-akselin ympäri ja muodostaa kappaleen, jonka tilavuus jokaisella välillä $[0, x]$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, on x^5. Määritä $f(x)$. Piirrä kuvio. (Ylioppilaskoe, k. 1997)

174. Derivoi funktio.

a) $\displaystyle f(x) = \int_x^1 \sqrt{1 + t^4}\ \mathrm{d}t$

b) $\displaystyle g(x) = \int_1^{3x} \sqrt{1 + t^4}\ \mathrm{d}t$

c) $\displaystyle h(x) = \int_x^{3x} \sqrt{1 + t^4}\ \mathrm{d}t$

175. Määritä funktion $\displaystyle f(x) = \int_x^{3x} te^t\ \mathrm{d}t$ derivaattafunktion nollakohdat.

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

176. Määritä vakiot A ja B niin, että funktio $g(x) = A\sqrt{1-x^2} + B \arcsin x$ on funktion $f(x) = \dfrac{4x-3}{\sqrt{1-x^2}}$ integraalifunktio.

177. Määritä funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2\,, \text{ kun } x < 0 \\ e^{3x} + 1, \text{ kun } x \geqslant 0, \end{cases}$$

se integraalifunktio, jonka kuvaaja kulkee pisteen $(1, 2)$ kautta. (Ylioppilaskoe, s. 1998)

178. Määritä funktion $f(x) = \dfrac{1}{3 + |x|}$ integraalifunktio, jonka kuvaaja kulkee pisteen $(6, 0)$ kautta.

179. Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} \sin 2x, \text{ kun } x < 0 \\ \sin 3x, \text{ kun } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Laske $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

180. Derivoi funktio.

a) $f(x) = \displaystyle\int_2^x \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$ b) $g(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$

181. Halutaan tehdä 10 cm korkea pyörähdyskappaleen muotoinen malja, jonka tilavuus on 0,5 litraa ja jolla on seuraava ominaisuus: maljassa olevan nesteen määrä on suoraan verrannollinen nestekerroksen korkeuden neljänteen potenssiin. Määritä jatkuva epänegatiivinen funktio $f\colon [0, 10] \to \mathbb{R}$, jonka kuvaajan pyörähtäessä x-akselin ympäri syntyy tällainen malja. Piirrä malja.

182. Derivoi funktio.

a) $f(x) = \displaystyle\int_x^0 t^2 e^t\,\mathrm{d}t$

b) $g(x) = \displaystyle\int_0^{3x} t^2 e^t\,\mathrm{d}t$

c) $h(x) = \displaystyle\int_x^{3x} t^2 e^t\,\mathrm{d}t$

183. Funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ määritellään seuraavasti:

$$f(x) = \int_x^{3x} \sqrt{t^2 + 1}\,\mathrm{d}t.$$

Määritä derivaatta $f'(x)$ ja tutki funktion $f(x)$ ääriarvoja. (Ylioppilaskoe, s. 2000)

184. y-akselin suuntaiset suorat $x = a$ ja $x = 2a$ erottavat viipaleen käyrän $y = \dfrac{1}{1 + x^4}$ ja x-akselin välisestä alueesta. Millä a:n arvolla viipaleen pinta-ala on suurin?

185. Osoita, että funktion $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$ kuvaajan, x-akselin ja suorien $x = a$ ja $x = a^2$, missä $a > 1$, rajaaman alueen pinta-ala ei riipu luvusta a.

186. Olkoon $f(x) = \int_2^x \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$. Mikä funktion f määrittelyjoukko on? Osoita, että funktio $g(x) = xf(x) - f(x^2)$ on funktion f integraalifunktio.

187. Määritä jatkuva funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolla on ominaisuus

a) $\int_0^{2a} f(x)\,\mathrm{d}x = e^a - 1$ kaikilla a

b) $\int_1^{a+1} f(x)\,\mathrm{d}x = a^2 - a$ kaikilla a.

188. Määritellään funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seuraavasti:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & \text{kun } x \neq 0 \\ 0, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

Funktio f on kahden derivoituvan funktion tulona derivoituva, kun $x \neq 0$. Tehtävässä 101 on osoitettu, että funktio f on derivoituva myös kohdassa $x = 0$ ja $f'(0) = 0$. Osoita, että derivaattafunktio f' on epäjatkuva kohdassa $x = 0$. Derivaattafunktio f' on siis esimerkki epäjatkuvasta funktiosta, jolla on integraalifunktio.

Epäoleellinen integraali

ESIMERKKI 1

Mitä raja-arvoa lähenee

a) määrätyn integraalin $\int_0^s e^{-3x}\,\mathrm{d}x$ arvo, kun yläraja s suurenee rajatta

b) määrätyn integraalin $\int_s^0 e^{-3x}\,\mathrm{d}x$ arvo, kun alaraja s pienenee rajatta

c) määrätyn integraalin $\int_s^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ arvo, kun alaraja s lähestyy oikealta kohtaa 0?

Ratkaisu

a) $\int_0^s e^{-3x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\int_0^s -3e^{-3x}\,\mathrm{d}x$ $\qquad \int f'(x)e^{f(x)}\,\mathrm{d}x = e^{f(x)} + C$

$$= -\frac{1}{3}\Big/_0^s e^{-3x} = -\frac{1}{3}(e^{-3s} - e^{-3\cdot 0})$$

$$= -\frac{1}{3}(e^{-3s} - 1) \to -\frac{1}{3}(0 - 1) = \frac{1}{3}, \text{ kun } s \to \infty$$

Määrätyn integraalin arvo lähenee raja-arvoa $\frac{1}{3}$.

b) $\int_s^0 e^{-3x}\,dx = -\frac{1}{3}\Big/_s^0 e^{-3x} = -\frac{1}{3}(e^{-3\cdot 0} - e^{-3s}) = -\frac{1}{3}(1 - e^{-3s})$

$= -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{-3s}$

Koska $e^{-3s} \to \infty$, kun $s \to -\infty$, niin

$\int_s^0 e^{-3x}\,dx = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{-3s} \to \infty$, kun $s \to -\infty$.

Kun alaraja s pienenee rajatta, määrätyn integraalin arvolla ei ole raja-arvoa.

c) $\int_s^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_s^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx$ $\qquad \int x^r\,dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C$

$= \Big/_s^1 2x^{\frac{1}{2}} = 2\Big/_s^1 \sqrt{x}$

$= 2(1 - \sqrt{s}) \to 2(1 - 0) = 2$, kun $s \to 0+$

Määrätyn integraalin arvo lähenee raja-arvoa 2.

Vastaus a) $\frac{1}{3}$ b) ei raja-arvoa c) 2

Epäoleellinen integraali

Määrätyn integraalin raja-arvoa, kun integraalin yläraja tai alaraja kasvaa rajatta, pienenee rajatta tai lähenee toispuolisesti sellaista kohtaa, jossa funktio ei ole määritelty, kutsutaan *epäoleelliseksi integraaliksi*.

Oletetaan, että funktio f on jatkuva välillä $[a, \infty[$. Jos raja-arvo $\lim\limits_{s \to \infty} \int\limits_a^s f(x)\,\mathrm{d}x = b$ on olemassa, niin sanotaan, että epäoleellinen integraali $\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ *suppenee*, ja merkitään $\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = b$.

Esimerkin 1 a-kohdassa nähtiin, että epäoleellinen integraali $\int\limits_0^\infty e^{-3x}\,\mathrm{d}x$ suppenee ja $\int\limits_0^\infty e^{-3x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$.

Jos raja-arvoa $\lim\limits_{s \to \infty} \int\limits_a^s f(x)\,\mathrm{d}x$ ei ole olemassa, niin sanotaan, että epäoleellinen integraali $\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ *hajaantuu*.

Samalla tavalla määritellään muiden epäoleellisten integraalien suppeneminen ja hajaantuminen ja vastaavat merkinnät:

Jos funktio f on jatkuva välillä $]-\infty, a]$ ja $\lim\limits_{s \to -\infty} \int\limits_s^a f(x)\,\mathrm{d}x = c$, niin sanotaan, että $\int\limits_{-\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}x$ suppenee, ja $\int\limits_{-\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}x = c$.

Esimerkin 1 b-kohdassa nähtiin, että epäoleellinen integraali $\int\limits_{-\infty}^0 e^{-3x}\,\mathrm{d}x$ hajaantuu.

Jos funktio f on jatkuva välillä $]a, b]$ ja $\lim\limits_{s \to a+} \int\limits_s^b f(x)\,\mathrm{d}x = d$, niin sanotaan, että $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ suppenee, ja $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = d$.

Jos funktio f on jatkuva välillä $[a, b[$ ja $\lim\limits_{s \to b-} \int\limits_a^s f(x)\,\mathrm{d}x = d$, niin sanotaan, että $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ suppenee, ja $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = d$.

Esimerkin 1 c-kohdassa nähtiin, että epäoleellinen integraali $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ suppenee ja $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2$.

ESIMERKKI 2

Määritä. a) $\int_1^{\infty} \frac{1}{(3x-1)^2}\,\mathrm{d}x$ b) $\int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{1}{(3x-1)^2}\,\mathrm{d}x$

Ratkaisu

a) Funktio $\frac{1}{(3x-1)^2}$ on määritelty koko välillä $[1, \infty[$. Määritetään määrätyn integraalin $\int_1^s \frac{1}{(3x-1)^2}\,\mathrm{d}x$ raja-arvo, kun yläraja s suurenee rajatta.

$$\int_1^s \frac{1}{(3x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^s (3x-1)^{-2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3}\int_1^s 3(3x-1)^{-2}\,\mathrm{d}x \qquad \int f'(x)\,f(x)^r\,\mathrm{d}x = \frac{1}{r+1}f(x)^{r+1} + C$$

$$= \frac{1}{3}\Big/_1^s -(3x-1)^{-1} = -\frac{1}{3}\Big/_1^s \frac{1}{3x-1}$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3s-1} - \frac{1}{2}\right) \to -\frac{1}{3}\left(0 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}, \text{ kun } s \to \infty$$

Siis $\int_1^{\infty} \frac{1}{(3x-1)^2}\,\mathrm{d}x$ suppenee ja $\int_1^{\infty} \frac{1}{(3x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}$.

b) Funktio $\dfrac{1}{(3x-1)^2}$ on määritelty välillä $]\frac{1}{3}, 1]$, mutta ei ole määritelty päätepisteessä $\frac{1}{3}$. Määritetään $\lim\limits_{t \to \frac{1}{3}+} \int\limits_t^1 \dfrac{1}{(3x-1)^2}\,\mathrm{d}x$.

$$\int_t^1 \frac{1}{(3x-1)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\Big/_t^1 \frac{1}{3x-1}$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3t-1}\right) = -\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3t-1}$$

Koska kohta $t = \frac{1}{3}$ on lausekkeen $\dfrac{1}{3t-1}$ nimittäjän nollakohta, mutta lauseke ei ole kohdassa $\frac{1}{3}$ ”muotoa $\frac{0}{0}$”, lausekkeella ei ole raja-arvoa, kun $t \to \frac{1}{3}+$.* Epäoleellinen integraali $\int\limits_{\frac{1}{3}}^1 \dfrac{1}{(3x-1)^2}\,\mathrm{d}x$ hajaantuu.

Vastaus a) $\frac{1}{6}$ b) Integraali hajaantuu.

---

* Koska $3t - 1 > 0$, kun $t > \frac{1}{3}$, niin $3t - 1 \to 0+$, kun $t \to \frac{1}{3}+$.

Siis $\dfrac{1}{3t-1} \to \infty$, kun $t \to \frac{1}{3}+$.

Edellisten epäoleellisten integraalien avulla määritellään sellaiset epäoleelliset integraalit, jotka ovat epäoleellisia sekä ala- että ylärajalla.

Ylä- ja alarajalla epäoleelliset integraalit

Oletetaan, että funktio f on jatkuva koko reaalilukujen joukossa. Olkoon c jokin reaaliluku.

Jos molemmat epäoleelliset integraalit $\int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x$ ja $\int_{c}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ suppenevat, niin sanotaan, että epäoleellinen integraali $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ suppenee, ja

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Integraalin $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ suppeneminen ja arvo eivät riipu luvun c valinnasta (tehtävä 211).

Esimerkissä 1 nähtiin, että epäoleellinen integraali $\int_{-\infty}^{0} e^{-3x}\,\mathrm{d}x$ hajaantuu. Siis myös epäoleellinen integraali $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-3x}\,\mathrm{d}x$ hajaantuu.

Oletetaan, että funktio f on jatkuva välillä $]a, b[$.
Olkoon c jokin luku välillä $]a, b[$.

Jos molemmat epäoleelliset integraalit $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ ja $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ suppenevat, niin sanotaan, että epäoleellinen integraali $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ suppenee, ja

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Integraalin $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ suppeneminen ja arvo eivät riipu luvun c valinnasta.

Vastaavasti määritellään kahden epäoleellisen integraalin summana funktion $f\colon]a, \infty[\to \mathbb{R}$ epäoleellinen integraali $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ ja funktion $f\colon]-\infty, a[\to \mathbb{R}$ epäoleellinen integraali $\int_{-\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

Esimerkissä 2 nähtiin, että epäoleellinen integraali $\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{1}{(3x-1)^2}\,\mathrm{d}x$ hajaantuu. Siis myös epäoleellinen integraali $\int_{\frac{1}{3}}^\infty \frac{1}{(3x-1)^2}\,\mathrm{d}x$ hajaantuu.

ESIMERKKI 3

Määritä $\int_{-\infty}^{\infty} |x| e^{-x^2}\,dx$.

Ratkaisu Määritetään epäoleelliset integraalit $\int_{0}^{\infty} |x| e^{-x^2}\,dx$ ja $\int_{-\infty}^{0} |x| e^{-x^2}\,dx$.

Kun $x \geqslant 0$, niin $|x| = x$. Kun $s > 0$, niin

$$\int_0^s |x| e^{-x^2}\,dx = \int_0^s x e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^s -2x e^{-x^2}\,dx \qquad \int f'(x) e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)} + C$$

$$= -\frac{1}{2}\Big/_0^s e^{-x^2} = -\frac{1}{2}(e^{-s^2} - 1)$$

$$\to -\frac{1}{2}(0 - 1) = \frac{1}{2}, \text{ kun } s \to \infty.$$

Kun $x \leqslant 0$, niin $|x| = -x$. Kun $t < 0$, niin

$$\int_t^0 |x| e^{-x^2}\,dx = -\int_t^0 x e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\Big/_t^0 e^{-x^2}$$

$$= \frac{1}{2}(1 - e^{-t^2}) \to \frac{1}{2}(1 - 0) = \frac{1}{2}, \text{ kun } t \to -\infty.$$

Koska integraalit $\int_0^{\infty} |x| e^{-x^2}\,dx$ ja $\int_{-\infty}^{0} |x| e^{-x^2}\,dx$ suppenevat, niin

$\int_{-\infty}^{\infty} |x| e^{-x^2}\,dx$ suppenee ja

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| e^{-x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} |x| e^{-x^2}\,dx + \int_0^{\infty} |x| e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Vastaus 1

TEHTÄVIÄ

SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

189. Suppeneeko vai hajaantuuko epäoleellinen integraali? Jos integraali suppenee, niin mikä sen arvo on?

a) $\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\,dx$ b) $\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$ c) $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

190. Suppeneeko vai hajaantuuko epäoleellinen integraali? Jos integraali suppenee, mikä sen arvo on?

a) $\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$ b) $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ c) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

191. Määritä epäoleellinen integraali.

a) $\int_1^\infty e^{2x}\,dx$ b) $\int_{-\infty}^1 e^{2x}\,dx$ c) $\int_{-\infty}^\infty e^{2x}\,dx$

192. Laske $\int_{-\infty}^\infty e^{-|x|}\,dx$.

193. Olkoon $A(a)$ käyrän $y = \frac{1}{x}$ ja x-akselin välillä $[1, a]$ rajaaman alueen pinta-ala, ja olkoon $V(a)$ sen kappaleen tilavuus, joka muodostuu, kun tämä alue pyörähtää x-akselin ympäri. Määritä a) $\lim_{a\to\infty} A(a)$ b) $\lim_{a\to\infty} V(a)$.

194. Määritä $\int_1^\infty \left(\frac{3}{3x-2} - \frac{2}{2x+1}\right) dx$.

195. Määritä $\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$.

196. Määritä $\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

197. Määritä $\int_0^\infty \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) dx$.

198. Epäoleellista integraalia $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ tutkittaessa olisi houkuttelevaa määrittää raja-arvot molemmissa päissä samalla kertaa esimerkiksi määrittämällä $\lim_{s\to\infty} \int_{-s}^s f(x)\,dx$. Tällöin saatetaan kuitenkin päätyä virheelliseen tulokseen: raja-arvo $\lim_{s\to\infty} \int_{-s}^s f(x)\,dx$ voi olla olemassa, vaikka epäoleellinen integraali $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ hajaantuu.

a) Määritä $\lim_{s\to\infty} \int_{-s}^s x\,dx$.

b) Suppeneeko epäoleellinen integraali $\int_{-\infty}^\infty x\,dx$?

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

199. Määritä.

a) $\int_0^\infty \frac{1}{2x+1}\,dx$ b) $\int_0^\infty \frac{1}{(2x+1)^2}\,dx$

200. Määritä.

a) $\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$ b) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\,dx$

201. Käyrä $y = e^{-\pi x}$ pyörähtää välillä $0 \leqslant x \leqslant a$ x-akselin ympäri. Määritä pyörähdyskappaleen tilavuuden raja-arvo, kun a suurenee rajatta.

202. Käytä hyväksi derivointikaavoja

$\mathrm{D}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ja $\mathrm{D}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$

ja määritä

a) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ b) $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$.

203. a) Määritä $\lim_{s\to\infty} \int_{-s}^{s} \sin x\,dx$.

b) Suppeneeko epäoleellinen integraali

$\int_{-\infty}^{\infty} \sin x\,dx$?

204. Määritä.

a) $\int_0^\infty e^{-x}\sin(\pi e^{-x})\,dx$ b) $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}\,dx$

205. Määritä $\int_1^\infty \left(\frac{3x}{3x^2-1} - \frac{x}{x^2+1}\right)dx$.

206. Määritä $\int_0^\infty \left(x - \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}\right)dx$.

207. Laske integraali $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$, kun

$$f(x) = \begin{cases} x^4 & \text{, jos } x = 0 \text{ tai } x^4 \leqslant 1/x^4 \\ 1/x^4 & \text{, jos } 1/x^4 \leqslant x^4. \end{cases}$$

(Ylioppilaskoe, s. 2004)

208. Laske käyrän $y^2(1-x^2) = x^2$ ja suorien $x = -a$ ja $x = a$, missä $0 < a < 1$, rajaaman alueen pinta-ala. Mitä raja-arvoa pinta-ala lähenee, kun a lähenee lukua 1?

209. Osoita, että funktio $f : f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-t|}\,dx$

on määritelty kaikilla muuttujan t reaaliarvoilla. Määritä funktion f lauseke integroidussa muodossa.

210. Määritä funktion

$$f :]0, \infty[\to \mathbb{R},\ f(t) = \int_1^\infty \left|\frac{1}{tx^2} - \frac{1}{x^3}\right| dx,$$

lauseke integroidussa muodossa.
Mikä funktion f pienin arvo on?

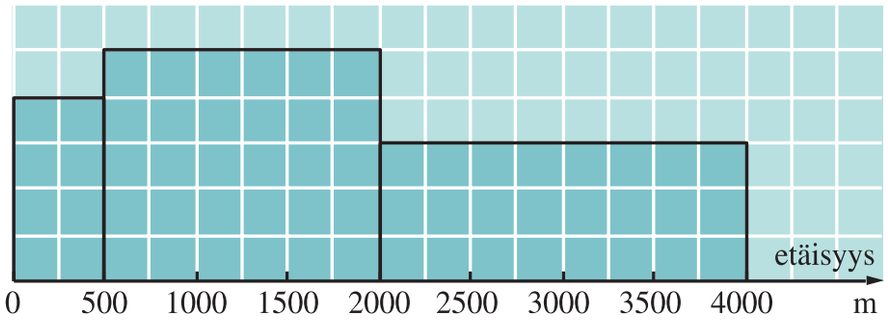
211. Jatkuvan funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ epäoleellinen integraali $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ määriteltiin seuraavasti: jos epäoleelliset integraalit $\int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x$ ja $\int_{c}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ suppenevat, niin integraali $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ suppenee ja $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Osoita, että epäoleellisen integraalin $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ suppeneminen ja arvo eivät riipu kohdan c valinnasta.

Jatkuvat todennäköisyysjakaumat

Ongelma

Tutkimuksessa selvitettiin Suvikummun keskustaajaman kotitalouksien etäisyyttä lähimmästä päivittäistavaramyymälästä. Etäisyyden jakaumaa havainnollistettiin histogrammilla. Olkoon satunnaismuuttuja X satunnaisesti valitun kotitalouden etäisyys lähimmästä päivittäistavaramyymälästä. Määritä todennäköisyys $\mathrm{P}(1\,500 \leqslant X \leqslant 2\,500)$.



Kurssissa Todennäköisyys ja tilastot on tutustuttu normaalijakaumaan esimerkkinä jatkuvan satunnaismuuttujan jakaumasta. Jatkuvien satunnaismuuttujien yleinen teoria on tärkeä integraalilaskennan sovellus.*

Jatkuva satunnaismuuttuja

Satunnaismuuttuja, jonka mahdolliset arvot muodostavat lukusuoran välin, on *jatkuva satunnaismuuttuja.***

---

* Kurssissa Todennäköisyys ja tilastot normaalijakauman yhteydessä ei käytetty integraalilaskentaa, vaan todennäköisyyksiä katsottiin taulukosta tai laskettiin laskimella. Tämä johtuu siitä, että jakaumaan liittyvät integraalit (funktion e^{-x^2} integraalit) voidaan laskea vain numeerisin menetelmin.

** Satunnaismuuttuja, jonka arvot ovat erillisiä lukuja, on *diskreetti satunnaismuuttuja*. Kurssissa Todennäköisyys ja tilastot tutkittiin diskreettien satunnaismuuttujien jakaumia.

Jatkuva satunnaismuuttuja on esimerkiksi väliltä $]0, 1[$ arvotun satunnaisluvun käänteisluku. Mahdolliset arvot muodostavat välin $]1, \infty[$. Jatkuvana satunnaismuuttujana voidaan myös pitää satunnaisesti arvotun 18-vuotiaan suomalaisnaisen pituutta.

Jatkuvan satunnaismuuttujan X jakauman ilmaisee jakauman tiheysfunktio.

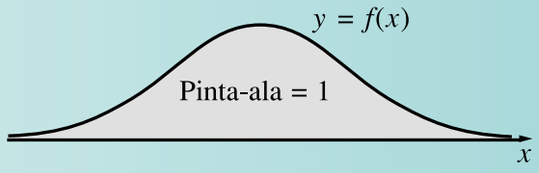
Tiheysfunktio

Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jonkin satunnaismuuttujan X *tiheysfunktio*, jos funktio f on kaikkialla epänegatiivinen ja jos sen kuvaaja rajaa x-akselin kanssa alueen, jonka pinta-ala on yksi, eli jos

$f(x) \geqslant 0$ kaikilla x

ja

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$



Tiheysfunktio saattaa olla vakiofunktio nolla jonkin lukusuoran välin ulkopuolella, jolloin kuvaajan ja x-akselin välistä pinta-alaa laskettaessa lasketaan todellisuudessa jokin muu integraali (määrätty tai epäoleellinen) kuin $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Tiheysfunktiolta ei vaadita, että se on kaikkialla jatkuva.*

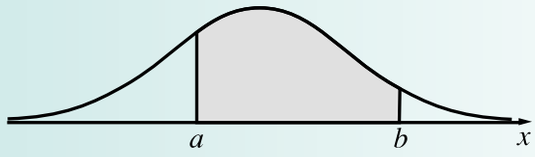
---

* Siksi merkintä $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ on nyt hieman harhaanjohtava, sillä epäjatkuville tiheysfunktioille merkinnän käyttö edellyttää yleisempää määrätyn integraalin käsitettä kuin lukio-opintojen määrätty integraali. Tästä ei käytännössä aiheudu ongelmia, sillä kirjan esimerkeissä ja tehtävissä integraalit voidaan laskea integroiden tavalliseen tapaan sopivasti valituilla väleillä.

Todennäköisyydet

Todennäköisyys, että satunnaismuuttujan X arvot ovat jollain välillä, on tiheysfunktion kuvaajan ja x-akselin tällä välillä rajaaman alueen pinta-ala. Esimerkiksi

$$\mathrm{P}(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$



Odotusarvo

Olkoon f jatkuvan satunnaismuuttujan X tiheysfunktio. Satunnaismuuttujan X *odotusarvo* on

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x,$$

jos epäoleellinen integraali suppenee.
Jos integraali hajaantuu, satunnaismuuttujalla ei ole odotusarvoa.

Jatkuvan satunnaismuuttujan X odotusarvolla on samanlainen tulkinta kuin diskreetin jakauman odotusarvolla: jos satunnaiskoetta, johon muuttuja X liittyy, toistetaan ja tehdään tilastoa havaituista muuttujan X arvoista, niin toistojen määrän kasvaessa havaittujen arvojen keskiarvo lähenee odotusarvoa.

Varianssi ja keskihajonta

Olkoon f jatkuvan satunnaismuuttujan X tiheysfunktio. Jos satunnaismuuttujalla X on odotusarvo $\mathrm{E}(X) = \mu$, niin satunnaismuuttujan X *varianssi* on

$$\mathrm{D}^2(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)\,\mathrm{d}x,$$

jos epäoleellinen integraali suppenee.

Satunnaismuuttujan X *keskihajonta* $\mathrm{D}(X)$ on varianssin neliöjuuri.

$$\mathrm{D}(X) = \sqrt{\mathrm{D}^2(X)}$$

ESIMERKKI 1

a) Määritä sellainen vakion a arvo, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ , kun } x < 1 \\ \dfrac{a}{x^3} \text{ , kun } x \geqslant 1 \end{cases}$$

on erään satunnaismuuttujan X tiheysfunktio, ja laske $\mathrm{P}(2 \leqslant X \leqslant 3)$.
b) Määritä satunnaismuuttujan X odotusarvo.

Ratkaisu

a) Funktio f on tiheysfunktio, jos se on kaikkialla epänegatiivinen ja jos sen kuvaajan ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-ala on 1.

Funktio f on kaikkialla epänegatiivinen, kun $a \geqslant 0$.

Koska funktio f on vakiofunktio 0 välillä $]-\infty, 1[$, niin funktion f kuvaajan ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-ala on

$$\int_1^\infty \frac{a}{x^3}\,\mathrm{d}x.$$

Ratkaistaan, millä a:n arvolla pinta-ala on 1.

$$\int_1^s \frac{a}{x^3}\,\mathrm{d}x = a\int_1^s x^{-3}\,\mathrm{d}x = a\Big/_1^s \left(-\frac{1}{2}x^{-2}\right) = -\frac{a}{2}\Big/_1^s \frac{1}{x^2}$$

$$= -\frac{a}{2}\left(\frac{1}{s^2} - 1\right) \to -\frac{a}{2}(0 - 1) = \frac{a}{2}, \text{ kun } s \to \infty$$

Siis

$$\int_1^\infty \frac{a}{x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{2},$$

joten pinta-ala on 1 silloin, kun $a = 2$. Koska $2 > 0$, niin funktio f on tiheysfunktio, kun $a = 2$.

Tällöin on

$$\mathrm{P}(2 \leqslant X \leqslant 3) = \int_2^3 \frac{2}{x^3}\,\mathrm{d}x = \Big/_2^3 -\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{36} \approx 0{,}14.$$

b) Satunnaismuuttujan X odotusarvo on

$$\mathrm{E}(X) = \int_1^\infty x \cdot \frac{2}{x^3}\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{2}{x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{s \to \infty} \int_1^s \frac{2}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{s \to \infty} \Big/_1^s -\frac{2}{x}$$

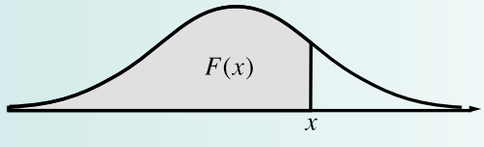
$$= \lim_{s \to \infty} \left(-\frac{2}{s} + 2\right) = 0 + 2 = 2.$$

Vastaus a) $a = 2$, $\mathrm{P}(2 \leqslant X \leqslant 3) = \frac{5}{36} \approx 0{,}14$ b) $\mathrm{E}(X) = 2$

Kertymäfunktio

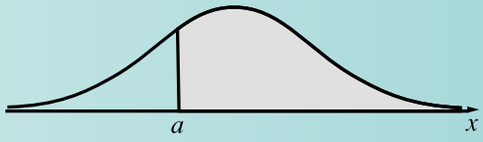
Funktio $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \mathrm{P}(X \leqslant x)$, on satunnaismuuttujan X *kertymäfunktio*. Kertymäfunktion arvo kohdassa x ilmaisee, millä todennäköisyydellä satunnaismuuttujan X arvo on pienempi tai yhtä suuri kuin x.

$$F(x) = \mathrm{P}(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$



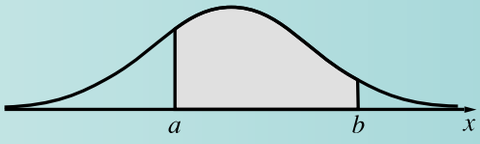
Jos tunnetaan satunnaismuuttujan X kertymäfunktio F, niin satunnaismuuttujaan X liittyvät todennäköisyydet voidaan laskea kertymäfunktion avulla. Esimerkiksi

$$\mathrm{P}(X \geqslant a) = 1 - \mathrm{P}(X \leqslant a) = 1 - F(a)$$



ja

$$\mathrm{P}(a \leqslant X \leqslant b) = \mathrm{P}(X \leqslant b) - \mathrm{P}(X \leqslant a)$$
$$= F(b) - F(a).$$



Luvussa Integraalifunktio ja määrätty integraali havaittiin, että kun jatkuvan funktion f määrätty integraali derivoidaan ylärajan suhteen, derivaattafunktio on f. Tämä pätee myös suppeneville epäoleellisille integraaleille*, joten

$$F'(x) = \mathrm{D}_x \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = f(x).$$

Tiheysfunktio on kertymäfunktion derivaattafunktio

Jos f on jatkuvan satunnaismuuttujan X tiheysfunktio ja F jakauman kertymäfunktio, niin

$$F'(x) = f(x)$$

jokaisella välillä, jolla kertymäfunktio on derivoituva.

---

* Oletetaan, että epäoleellinen integraali $\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ suppenee jokaisella x jollakin lukusuoran välillä, ja olkoon a jokin välin piste. Tällöin

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{a}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{ja} \quad \mathrm{D}_x \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{D}_x\Big(\int_{-\infty}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{a}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\Big)$$
$$= \mathrm{D}_x \int_{-\infty}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{D}_x \int_{a}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = 0 + f(x) = f(x).$$

ESIMERKKI 2

Funktio

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{kun } x < 1 \\ \dfrac{2}{x^3} & , \text{kun } x \geqslant 1 \end{cases}$$

on erään satunnaismuuttujan X tiheysfunktio (esimerkki 1). Määritä satunnaismuuttujan X kertymäfunktio F. Laske kertymäfunktion avulla todennäköisyydet $\mathrm{P}(X \leqslant 2)$, $\mathrm{P}(X \geqslant 4)$ ja $\mathrm{P}(3 \leqslant X \leqslant 4)$.

Ratkaisu

Tiheysfunktio f on vakiofunktio 0 välillä $]-\infty, 1[$.

Kun $x < 1$, niin

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0.$$

Kun $x \geqslant 1$, niin

$$F(x) = \int_{1}^{x} \frac{2}{t^3}\,\mathrm{d}t = \Big/_{1}^{x} \left(-\frac{1}{t^2}\right) = -\frac{1}{x^2} + 1 = 1 - \frac{1}{x^2}.$$

Siis

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \text{kun } x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x^2} & , \text{kun } x \geqslant 1. \end{cases}$$

Lasketaan kysytyt todennäköisyydet kertymäfunktion avulla.

$$\mathrm{P}(X \leqslant 2) = F(2) = 1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

$$\mathrm{P}(X \geqslant 4) = 1 - F(4) = 1 - \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) = \frac{1}{16} = 0{,}0625$$

$$\mathrm{P}(3 \leqslant X \leqslant 4) = F(4) - F(3) = (1 - \frac{1}{4^2}) - (1 - \frac{1}{3^2})$$

$$= -\frac{1}{4^2} + \frac{1}{3^2} = \frac{7}{144} \approx 0{,}049$$

Vastaus

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \text{kun } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x^2} & , \text{kun } x \geqslant 1, \end{cases}$$

$$\mathrm{P}(X \leqslant 2) = \frac{3}{4} = 0{,}75, \quad \mathrm{P}(X \geqslant 4) = \frac{1}{16} = 0{,}0625,$$

$$\mathrm{P}(3 \leqslant X \leqslant 4) = \frac{7}{144} \approx 0{,}049$$

ESIMERKKI 3

Huoneen lattia on neliö, jonka sivujen pituus on 4,0 metriä. Lattialta etsitään pudonnutta helmeä. Olkoon satunnaismuuttuja X helmen etäisyys lähimmästä seinästä.

a) Määritä $\mathrm{P}(X \leqslant 0{,}5)$.

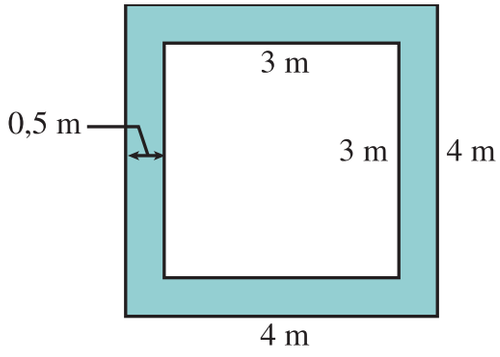
b) Määritä satunnaismuuttujan X kertymäfunktio F. Piirrä kertymäfunktion kuvaaja.

c) Määritä satunnaismuuttujan X tiheysfunktio f. Piirrä tiheysfunktion kuvaaja.

d) Laske satunnaismuuttujan X odotusarvo.

Ratkaisu

a) Helmen etäisyys seinästä on korkeintaan 0,5 metriä, jos helmi on seiniä myötäilevällä 0,5 metrin levyisellä kaistaleella. Kaistaleen pinta-ala on huoneen pinta-alan ja keskelle jäävän 3,0 metrin levyisen neliön pinta-alan erotus $4^2 - 3^2 = 7\ (\mathrm{m}^2)$.



Todennäköisyys $P(X \leqslant 0{,}5)$ on kaistaleen pinta-alan suhde koko huoneen pinta-alaan.

$$P(X \leqslant 0{,}5) = \frac{7}{16} \approx 0{,}44$$

b) Kertymäfunktion F arvo kohdassa x on todennäköisyys, että etäisyys X on pienempi tai yhtä suuri kuin x eli

$F(x) = P(X \leqslant x)$.

Lasketaan todennäköisyys $P(X \leqslant x)$ kaikilla muuttujan x reaaliarvoilla.

Koska satunnaismuuttuja X on etäisyys lähimmästä seinästä, niin aina on $0 \leqslant X \leqslant 2$.

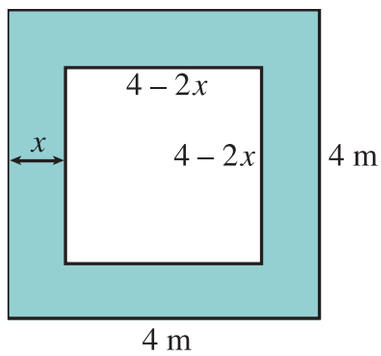
Kun $x < 0$, tapahtuma $X \leqslant x$ on mahdoton. Siis

$F(x) = P(X \leqslant x) = 0$, kun $x < 0$.

Oletetaan, että $0 \leqslant x \leqslant 2$.

Helmen etäisyys seinästä on korkeintaan x metriä, jos helmi on seiniä myötäilevällä x metrin levyisellä kaistaleella.
Kaistaleen pinta-ala on

$16 - (4 - 2x)^2 = 16 - (16 - 16x + 4x^2)$
$= 16x - 4x^2$.



Todennäköisyys $P(X \leqslant x)$ on kaistaleen pinta-alan suhde neliön pinta-alaan. Siis

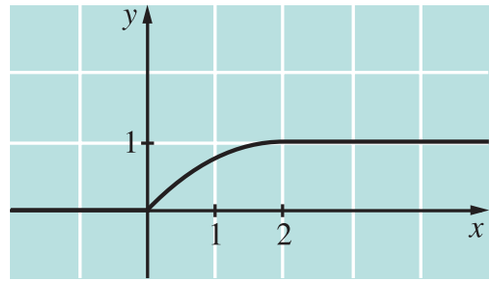
$$F(x) = P(X \leqslant x) = \frac{16x - 4x^2}{16} = x - \frac{1}{4}x^2, \text{ kun } 0 \leqslant x \leqslant 2.$$

Kun $x > 2$, niin tapahtuma $P(X \leqslant x)$ on varma. Siis

$F(x) = P(X \leqslant x) = 1$, kun $x > 2$.

Satunnaismuuttujan X kertymäfunktio on

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \text{kun } x < 0 \\ x - \frac{1}{4}x^2, & \text{kun } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1 & , \text{kun } x > 2. \end{cases}$$



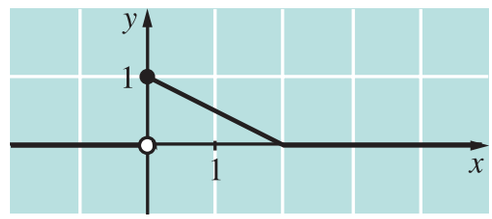
c) Satunnaismuuttujan X tiheysfunktio f on kertymäfunktion F derivaattafunktio eli $F'(x) = f(x)$ kaikissa pisteissä, joissa funktio F on derivoituva.

Siis

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{kun } x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}x, & \text{kun } 0 < x < 2 \\ 0 & , \text{kun } x > 2. \end{cases}$$

Tiheysfunktion arvoja kohdissa 0 ja 2 ei saada suoraan derivoimalla.* Koska todennäköisyydet ovat pinta-aloja, tiheysfunktion arvot erillisissä kohdissa 0 ja 2 eivät vaikuta satunnaismuuttujan todennäköisyyksiin. Arvoiksi $f(0)$ ja $f(2)$ voidaan määritellä mitkä tahansa epänegatiiviset luvut. Voidaan esimerkiksi määritellä nämä arvot lausekkeella $1 - \frac{1}{2}x$, jolloin saadaan:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{kun } x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}x, & \text{kun } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 & , \text{kun } x > 2. \end{cases}$$



* Tutkimalla erotusosamäärän toispuolisia raja-arvoja nähtäisiin, että kertymäfunktio F on derivoituva kohdassa 2 ja $F'(2) = 0$. Kohdassa 0 kertymäfunktio ei ole derivoituva.

d) Satunnaismuuttujan X odotusarvo on

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^2 xf(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 x(1 - \frac{1}{2}x)\mathrm{d}x = \int_0^2 (x - \frac{1}{2}x^2)\mathrm{d}x$$

$$= \Big/_0^2 (\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3) = (\frac{1}{2} \cdot 2^2 - \frac{1}{6} \cdot 2^3) - (\frac{1}{2} \cdot 0^2 - \frac{1}{6} \cdot 0^3)$$

$$= 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \approx 0{,}67 \text{ (m)}.$$

Vastaus

a) 0,44

b) $F(x) = \begin{cases} 0 & , \text{kun } x < 0 \\ x - \frac{1}{4}x^2 & , \text{kun } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1 & , \text{kun } x > 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{kun } x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}x & , \text{kun } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 & , \text{kun } x > 2 \end{cases}$

d) 0,67 m

ESIMERKKI 4

Väliltä $]0, 1[$ arvotaan satunnaisluku Z. Olkoon satunnaismuuttuja X satunnaisluvun Z käänteisluku.

a) Määritä satunnaismuuttujan X kertymäfunktio F ja tiheysfunktio f.

b) Laske satunnaismuuttujan X odotusarvo.*

Ratkaisu

a) Välillä $]0, 1[$ olevan satunnaisluvun Z käänteisluku $X = \frac{1}{Z}$ on välillä $]1, \infty[$. Siten, jos $x \leqslant 1$, niin

$F(x) = \mathrm{P}(X \leqslant x) = 0.$

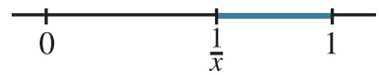
Oletetaan, että $x > 1$. Tällöin $X \leqslant x$, kun

$$\frac{1}{Z} \leqslant x \qquad | \cdot Z > 0$$

$$1 \leqslant Zx \qquad | : x > 0$$

$$Z \geqslant \frac{1}{x}.$$

Väliltä $]0, 1[$ arvottu satunnaisluku Z toteuttaa epäyhtälön $Z \geqslant \frac{1}{x}$, kun luku on välillä $[\frac{1}{x}, 1[$. Todennäköisyys $\mathrm{P}(Z \geqslant \frac{1}{x})$ on välin $[\frac{1}{x}, 1[$ pituuden $1 - \frac{1}{x}$ suhde koko välin pituuteen 1.



Siis

$F(x) = \mathrm{P}(X \leqslant x) = \mathrm{P}(\frac{1}{Z} \leqslant x) = \mathrm{P}(Z \geqslant \frac{1}{x}) = 1 - \frac{1}{x}$, kun $x > 1$.

---

* Esimerkin satunnaismuuttujaa voi tutkia laskimen satunnaislukutoiminnolla (yleensä rand tai rnd), joka arpoo satunnaisluvun väliltä $]0, 1[$. Laskimeen näppäillään lauseke $\frac{1}{\mathrm{rand}}$. Näppäimellä Enter saadaan aina uusi satunnaismuuttujan arvo.

Satunnaismuuttujan X kertymäfunktio on

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \text{kun } x \leqslant 1 \\ 1 - \frac{1}{x} & , \text{kun } x > 1 \end{cases}$$

ja tiheysfunktio $f(x) = F'(x)$ on

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{kun } x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & , \text{kun } x > 1. \end{cases}$$

Määritellään lisäksi, että $f(1) = 1$, jolloin

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{kun } x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & , \text{kun } x \geqslant 1. \end{cases}$$

b) Satunnaismuuttujan X odotusarvo on

$$\mathrm{E}(X) = \int_1^\infty x \cdot \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Koska

$$\int_1^s \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \Big/_1^s \ln|x| = \ln s \to \infty, \text{ kun } s \to \infty,$$

epäoleellinen integraali $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ hajaantuu. Satunnaismuuttujalla X ei ole odotusarvoa.

Vastaus

a)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \text{kun } x \leqslant 1 \\ 1 - \frac{1}{x} & , \text{kun } x > 1, \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{kun } x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & , \text{kun } x \geqslant 1 \end{cases}$$

b) Odotusarvoa ei ole.

TEHTÄVIÄ

SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

212. a) Osoita, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{kun } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & , \text{kun } 0 < x \leqslant 1 \\ 0 & , \text{kun } x > 1 \end{cases}$$

on erään satunnaismuuttujan X tiheysfunktio, ja laske $\mathrm{P}(0{,}25 \leqslant X \leqslant 0{,}5)$.
b) Määritä satunnaismuuttujan X odotusarvo.

213. Määritä sellainen vakion a arvo, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{kun } x < 0 \\ ae^{-2x} & , \text{kun } x \geqslant 0 \end{cases}$$

on erään satunnaismuuttujan X tiheysfunktio, ja laske $\mathrm{P}(X \leqslant 1)$.

214. a) Osoita, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{kun } x < 1 \\ \dfrac{1}{x} & , \text{kun } 1 \leqslant x \leqslant e \\ 0 & , \text{kun } x > e \end{cases}$$

on erään satunnaismuuttujan X tiheysfunktio.
b) Määritä satunnaismuuttujan X kertymäfunktio $F(x)$. Laske kertymäfunktion avulla todennäköisyydet $\mathrm{P}(X \leqslant 2{,}3)$, $\mathrm{P}(X \geqslant 2{,}3)$ ja $\mathrm{P}(1{,}7 \leqslant X \leqslant 2{,}3)$.

215. Jos satunnaismuuttujan X tiheysfunktio on jollain lukusuoran välillä $[a, b]$ positiivinen vakiofunktio ja muualla nolla, niin sanotaan, että X noudattaa *tasaista jakaumaa* eli X on tasaisesti jakautunut välille $[a, b]$. Oletetaan, että X on tasaisesti jakautunut välille $[1, 5]$ eli X:n tiheysfunktio on

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{kun } x < 1 \\ c, \text{kun } 1 \leqslant x \leqslant 5 \\ 0, \text{kun } x > 5. \end{cases}$$

a) Määritä vakio c ja piirrä tiheysfunktion kuvaaja. Laske todennäköisyydet $\mathrm{P}(X \leqslant 2)$ ja $\mathrm{P}(1{,}5 \leqslant X \leqslant 3{,}5)$.
b) Määritä satunnaismuuttujan X kertymäfunktio F ja piirrä kertymäfunktion kuvaaja.
c) Laske satunnaismuuttujan X odotusarvo ja keskihajonta.

216. Pallon muotoisessa vedellä täytetyssä säiliössä, jonka säteen pituus on 1 metri, ui pieni kala syömässä veteen tasaisesti sekoittunutta ravintoa. Olkoon satunnaismuuttuja X kalan etäisyys pallon keskipisteestä satunnaisella hetkellä. Määrätä satunnaismuuttujan X a) kertymäfunktio b) tiheysfunktio c) odotusarvo.

217. Halkaisijaltaan 20 cm olevaan pyöreään maalitauluun heitetään umpimähkään tikkaa. Olkoon satunnaismuuttuja $\underline{x}$ tauluun osuneen tikan etäisyys reunasta. Määritä $\underline{x}$:n kertymäfunktio, tiheysfunktio, odotusarvo ja keskihajonta. (Ylioppilaskoe, s. 1997)

218. Arvotaan satunnaisluku Z väliltä $[0, 4]$ ja piirretään neliö, jonka sivun pituus on arvottu luku Z. Olkoon satunnaismuuttuja X neliön pinta-alan suuruus.
a) Laske todennäköisyys $P(X \leqslant 9)$.
b) Määritä satunnaismuuttujan X kertymäfunktio $F(x)$.
c) Määritä satunnaismuuttujan X tiheysfunktio $f(x)$.
d) Laske satunnaismuuttujan X odotusarvo.

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

219. a) Osoita, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{kun } x < 1 \\ \dfrac{1}{x^2} & , \text{kun } x \geqslant 1 \end{cases}$$

on erään satunnaismuuttujan X tiheysfunktio, ja laske $P(4 \leqslant X \leqslant 5)$.
b) Määritä satunnaismuuttujan X odotusarvo.

220. Määritä sellainen vakion a arvo, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{kun } x < 2 \\ \dfrac{a}{x^2} + \dfrac{4}{ax^3} & , \text{kun } x \geqslant 2 \end{cases}$$

on erään satunnaismuuttujan X tiheysfunktio. Laske todennäköisyys $P(X \geqslant 3)$.

221. a) Määritä vakio a niin, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{kun } x < 1 \\ \dfrac{a}{\sqrt{x}} & , \text{kun } 1 \leqslant x \leqslant 4 \\ 0 & , \text{kun } x > 4 \end{cases}$$

on erään satunnaismuuttujan X tiheysfunktio.
b) Määritä satunnaismuuttujan X kertymäfunktio. Laske kertymäfunktion avulla $P(X < 2)$ ja $P(2 \leqslant X \leqslant 3)$.
c) Määritä satunnaismuuttujan X odotusarvo.

222. Olkoon satunnaismuuttuja X väliltä $[-1, 1]$ arvotun satunnaisluvun etäisyys nollasta.
a) Laske $P(X \leqslant \frac{1}{4})$.
b) Määritä satunnaismuuttujan X kertymäfunktio $F(x)$ ja tiheysfunktio $f(x)$. Piirrä molempien funktioiden kuvaajat.
c) Määritä satunnaismuuttujan X odotusarvo ja keskihajonta.

223. Kolmion muotoinen metsäalue rajoittuu yhdeltä sivultaan viivasuoraan tiehen. Alueen etäisimmän kohdan etäisyys tiestä on 2,0 km. Metsästä etsitään haavoittunutta riistaeläintä. Olkoon satunnaismuuttuja X eläimen etäisyys tiestä.
a) Muodosta satunnaismuuttujan X kertymäfunktio $F(x)$, ja määritä kertymäfunktion avulla $P(0{,}3 \leqslant X \leqslant 1{,}4)$.
b) Määritä satunnaismuuttujan X tiheysfunktio.
c) Laske satunnaismuuttujan X odotusarvo.

224. Määritä sellainen vakion a arvo, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{kun } x < 1 \\ ae^{-x+2} & , \text{kun } x \geqslant 1 \end{cases}$$

on erään satunnaismuuttujan X tiheysfunktio. Laske $P(2 \leqslant X \leqslant 3)$. Osoita, että funktio $-xe^{-x} - e^{-x}$ on funktion xe^{-x} integraalifunktio, ja määritä satunnaismuuttujan X odotusarvo käyttäen hyväksi raja-arvoa $\lim\limits_{x \to \infty} xe^{-x} = 0$.

225. Väliltä $]0, 1[$ arvotaan satunnaisluku Z. Olkoon satunnaismuuttuja X satunnaisluvun Z kuutiojuuren käänteisluku: $X = \dfrac{1}{\sqrt[3]{Z}}$.
Määritä satunnaismuuttujan X a) kertymäfunktio b) tiheysfunktio c) odotusarvo d) keskihajonta.

226. Suorakulmaisen kolmion ABC hypotenuusan BC pituudeksi on määrätty 1. Terävän kulman B suuruus radiaaneina määrätään arpomalla laskimella satunnaisluku väliltä $]0, \frac{\pi}{2}[$. Mikä kateetin AC pituuden odotusarvo on?

227. Väliltä $[0, 1]$ arvotaan satunnaisluvut x ja y. Olkoon satunnaismuuttuja Z lukujen x ja y etäisyys toisistaan. Määritä satunnaismuuttujan Z kertymäfunktio $F(z)$. Mikä lukujen etäisyyden odotusarvo on?

228. Väliltä $[0, 1]$ arvotaan satunnaisluvut a ja b. Olkoon satunnaismuuttuja X lukujen a ja b tulo. Määritä satunnaismuuttujan X tiheysfunktio $f(x)$. Osoita, että funktio $\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2$ on funktion $x \ln x$ integraalifunktio, ja määritä satunnaismuuttujan X odotusarvo käyttäen hyväksi raja-arvoa $\lim\limits_{x \to 0+} x^2 \ln x = 0$.

Lukujonon raja-arvo

Ongelma

Mitä lukua lukujonon jäsenet lähenevät, kun n kasvaa?

a) lukujono $a_n = \dfrac{1}{n^2}$

b) lukujono $b_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

c) lukujono $c_n = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$

d) lukujono $d_n = 3^n$

JOHDANTOESIMERKKI 1

Mitä lukua lukujonon jäsenet lähenevät, kun n kasvaa?

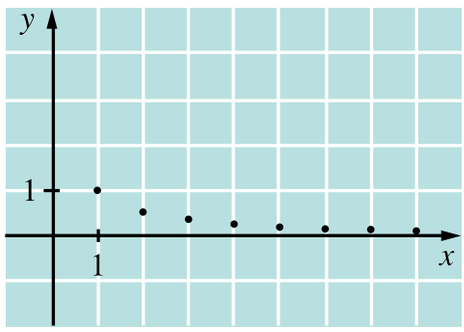
a) $a_n = \dfrac{1}{n}$ b) $b_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ c) $c_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$ d) $d_n = (-2)^n$

Ratkaisu

a) Jonon $a_n = \dfrac{1}{n}$ eli jonon

$1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \ldots$

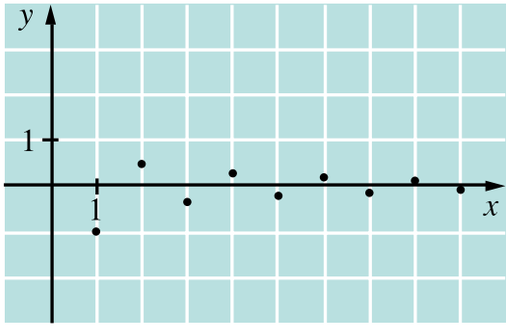
jäsenet lähenevät lukua 0.



b) Jonon $b_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ eli jonon

$-1,\ \dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{4}, \ldots$

jäsenet lähenevät lukua 0.



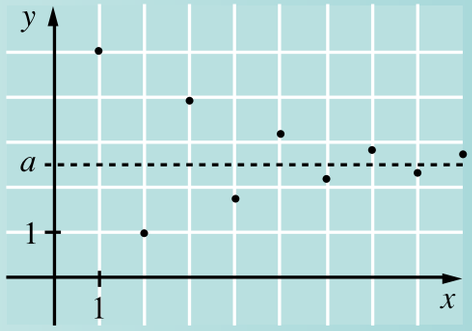
c) Luvun $-\dfrac{1}{2}$ potenssit $-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4},\ -\dfrac{1}{8},\ \dfrac{1}{16}, \ldots$ lähenevät lukua 0.

d) Luvun -2 potenssit $-2,\ 4,\ -8,\ 16, \ldots$ eivät lähene mitään lukua.

Vastaus a) 0 b) 0 c) 0 d) ei mitään lukua

Lukujonon raja-arvon määritelmä

Lukujonolla (a_n) on *raja-arvo* a, jos n:n kasvaessa lukujonon jäsenet lähestyvät lukua a. Lähestymisen tulee olla sellaista, että kun n on tarpeeksi suuri, lukujonon jäsenet ovat niin lähellä lukua a, kuin suinkin halutaan.



Jos lukujonolla (a_n) on raja-arvo a, merkitään

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a$$

tai

$a_n \to a$, kun $n \to \infty$.

Edellisen esimerkin b-kohdan nojalla $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$ eli

$\dfrac{(-1)^n}{n} \to 0$, kun $n \to \infty$.

Jos lukujonolla on raja-arvo, sanotaan, että lukujono *suppenee*.
Jos lukujonolla ei ole raja-arvoa, jono *hajaantuu*.

Edellisen esimerkin d-kohdan nojalla jono $d_n = (-2)^n$ hajaantuu.

Tärkeitä raja-arvoja, joiden avulla voidaan usein päätellä muiden jonojen raja-arvoja, ovat geometrisen jonon $q,\ q^2,\ q^3, \ldots$ ja jonon $1,\ \frac{1}{2^p},\ \frac{1}{3^p}, \ldots$ raja-arvot.

Jos $-1 < q < 0$ tai $0 < q < 1$, niin potenssit $q,\ q^2,\ q^3, \ldots$ lähenevät nollaa.

Jos $q = 0$, potenssien jono on vakiojono $0,\ 0,\ 0, \ldots$, jonka raja-arvo on 0.

Siis:

Geometrisen jonon $a_n = q^n$ raja-arvo

Jos $-1 < q < 1$, niin $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$.

Ehto $-1 < q < 1$ voidaan ilmaista myös itseisarvon avulla: $|q| < 1$.

Jos $q = 1$, jono $a_n = q^n$ on vakiojono $1,\ 1,\ 1, \ldots$, jonka raja-arvo on 1.

Jos $q \leqslant -1$ tai $q > 1$, jono $a_n = q^n$ hajaantuu.

Jos p on positiivinen kokonaisluku, luvut $1,\ \frac{1}{2^p},\ \frac{1}{3^p}, \ldots$ lähenevät nollaa.

Jonon $a_n = \frac{1}{n^p}$ raja-arvo

Jos p on positiivinen kokonaisluku, niin $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n^p} = 0$.

ESIMERKKI 2

Määritä $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{7 \cdot 4^n}{3 \cdot 5^n}$.

Ratkaisu

$$\frac{7 \cdot 4^n}{3 \cdot 5^n} = \frac{7}{3} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^n \qquad \text{Kun } |q| < 1, \text{ niin } \lim_{n \to \infty} q^n = 0.$$

$$\to \frac{7}{3} \cdot 0 = 0, \text{ kun } n \to \infty$$

Vastaus 0

ESIMERKKI 3

Määritä. a) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{3n - 1}{5n + 6}$ b) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{4n - 3}{n^2 + n}$ c) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^2 + 4}{1 - n}$

Ratkaisu Käytetään samaa menetelmää kuin tutkittaessa rationaalifunktioiden raja-arvoja, kun muuttujan arvot suurenevat rajatta. Osoittaja ja nimittäjä jaetaan nimittäjän korkeimmalla potenssilla.

a) $$\frac{3n - 1}{5n + 6} = \frac{\frac{3n}{n} - \frac{1}{n}}{\frac{5n}{n} + \frac{6}{n}} = \frac{3 - \frac{1}{n}}{5 + \frac{6}{n}} \to \frac{3 - 0}{5 + 0} = \frac{3}{5}, \text{ kun } n \to \infty$$

b) $$\frac{4n - 3}{n^2 + n} = \frac{\frac{4n}{n^2} - \frac{3}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} + \frac{n}{n^2}} = \frac{\frac{4}{n} - \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}} \to \frac{0 - 0}{1 + 0} = 0, \text{ kun } n \to \infty$$

c) $$\frac{n^2+4}{1-n} = \frac{\frac{n^2}{n}+\frac{4}{n}}{\frac{1}{n}-\frac{n}{n}} = \frac{\overbrace{n+\frac{4}{n}}^{\nearrow\infty}}{\underbrace{\frac{1}{n}-1}_{\searrow 1}} \to -\infty, \text{ kun } n \to \infty$$

Jono $\frac{n^2+4}{1-n}$ hajaantuu.

Vastaus a) $\frac{3}{5}$ b) 0 c) Jono hajaantuu.

ESIMERKKI 4

Määritä jonon $a_n = \frac{3n-7}{2n-3}$ raja-arvo. Mistä n:n arvosta lähtien jonon jäsenten etäisyys raja-arvosta on pienempi kuin 0,01?

Ratkaisu

$$a_n = \frac{3n-7}{2n-3} = \frac{\frac{3n}{n}-\frac{7}{n}}{\frac{2n}{n}-\frac{3}{n}} = \frac{3-\frac{7}{n}}{2-\frac{3}{n}} \to \frac{3-0}{2-0} = \frac{3}{2}, \text{ kun } n \to \infty$$

Jonon (a_n) raja-arvo on $\frac{3}{2}$.

Jäsenen a_n etäisyys raja-arvosta $\frac{3}{2}$ on erotuksen $a_n - \frac{3}{2}$ itseisarvo. Muodostetaan ja sievennetään etäisyyden lauseke.

$$\left|a_n - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{3n-7}{2n-3} - \frac{3}{2}\right|$$

$$= \left|\frac{2(3n-7) - 3(2n-3)}{2(2n-3)}\right|$$

$$= \left|\frac{6n - 14 - 6n + 9}{2(2n-3)}\right|$$

$$= \left|\frac{-5}{4n-6}\right| \qquad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

$$= \frac{5}{|4n-6|}$$

Lausekkeen $4n - 6$ arvot ovat positiivisia, kun kokonaisluku n on vähintään 2. Oletetaan, että $n \geqslant 2$. Tällöin $|4n - 6| = 4n - 6$ ja jäsenen a_n etäisyys raja-arvosta on

$$\left|a_n - \frac{3}{2}\right| = \frac{5}{4n-6}.$$

Ratkaistaan epäyhtälö.

$$\frac{5}{4n-6} < 0{,}01 \qquad \big| \cdot (4n-6) > 0$$

$$5 < 0{,}01(4n-6) \qquad \big| : 0{,}01 > 0$$

$$500 < 4n - 6$$

$$-4n < -506 \qquad \big| : (-4) < 0$$

$$n > \frac{506}{4} = 126{,}5$$

Jonon jäsenten etäisyys raja-arvosta on pienempi kuin 0,01 n:n arvosta 127 lähtien.

Vastaus $\frac{3}{2}$, arvosta 127 lähtien

Jonon $g(a_n)$ raja-arvo

Oletetaan, että jono $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$ suppenee ja $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Oletetaan, että funktion g määrittelyjoukko sisältää jonon $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$ jäsenet ja että funktio g on jatkuva kohdassa a.

Tällöin jono $g(a_1),\ g(a_2),\ g(a_3),\ \ldots$ suppenee kohti raja-arvoa $g(a)$ eli

$$\lim_{n\to\infty} g(a_n) = g\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right).$$

Perustelu. Koska funktio g on jatkuva kohdassa a, niin muuttujan arvojen $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$ lähetessä lukua a, funktion arvot $g(a_1),\ g(a_2),\ g(a_3),\ \ldots$ lähenevät lukua $g(a)$.

ESIMERKKI 5

Määritä jonon raja-arvo.

a) $a_n = \dfrac{\sqrt{5n^2+3n}}{n}$ b) $b_n = \sqrt{n^2+3n}+n$ c) $c_n = \sqrt{n^2+3n}-n$

Ratkaisu

a) $a_n = \dfrac{\sqrt{5n^2+3n}}{n} = \dfrac{\sqrt{5n^2+3n}}{\sqrt{n^2}}$ Koska $n>0$, niin $n=\sqrt{n^2}$.

$$= \sqrt{\frac{5n^2+3n}{n^2}} = \sqrt{5+\frac{3}{n}} \to \sqrt{5+0} = \sqrt{5}, \text{ kun } n\to\infty$$

b) Koska lausekkeiden $\sqrt{n^2+3n}$ ja n arvot suurenevat rajatta, kun n suurenee rajatta, niin myös summa $b_n = \sqrt{n^2+3n}+n$ suurenee rajatta.

Jono $b_n = \sqrt{n^2+3n}+n$ hajaantuu.

c) $c_n = \sqrt{n^2 + 3n} - n$

Lavennetaan erotus vastaavalla summalla $\sqrt{n^2 + 3n} + n$.

$$= \frac{(\sqrt{n^2 + 3n} + n)(\sqrt{n^2 + 3n} - n)}{\sqrt{n^2 + 3n} + n}$$

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$$= \frac{(n^2 + 3n) - n^2}{\sqrt{n^2 + 3n} + n}$$

$$= \frac{3n}{\sqrt{n^2 + 3n} + n}$$

Jaetaan osoittaja ja nimittäjä n:llä.

$$= \frac{3}{\frac{\sqrt{n^2 + 3n}}{n} + 1}$$

Koska $n > 0$, niin $n = \sqrt{n^2}$.

$$= \frac{3}{\frac{\sqrt{n^2 + 3n}}{\sqrt{n^2}} + 1} = \frac{3}{\sqrt{\frac{n^2 + 3n}{n^2}} + 1}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1}$$

$$\to \frac{3}{\sqrt{1 + 0} + 1} = \frac{3}{2}, \text{ kun } n \to \infty$$

Vastaus a) $\sqrt{5}$ b) Jono hajaantuu. c) $\frac{3}{2}$

Lukujonon voidaan joskus osoittaa suppenevan kohti nollaa vertaamalla sitä yksinkertaisempaan lukujonoon.

ESIMERKKI 6

Osoita, että $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\sin n}{n} = 0.$

Ratkaisu

Lukujono suppenee kohti nollaa, jos ja vain jos jäsenten itseisarvojen jono suppenee kohti nollaa.

Kaikilla muuttujan arvoilla on $|\sin x| \leqslant 1$. Siis kaikilla n:n arvoilla on

$$0 \leqslant \left|\frac{\sin n}{n}\right| = \frac{|\sin n|}{n} \leqslant \frac{1}{n}.$$

Koska $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n} = 0$, niin myös $\lim\limits_{n \to \infty} \left|\dfrac{\sin n}{n}\right| = 0.$

Siis $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\sin n}{n} = 0.$ □

Rekursiivinen lukujono

Rekursiivinen lukujono kuvaillaan ilmoittamalla jonon ensimmäinen jäsen (ensimmäiset jäsenet) ja antamalla rekursiokaava, joka ilmaisee, kuinka muut jäsenet lasketaan edellisten jäsenten avulla.

Olkoon $a_1, a_2, a_3, \ldots$ rekursiivinen lukujono, jonka jäsenet toisesta jäsenestä alkaen lasketaan rekursiokaavalla

$a_n = g(a_{n-1})$, kun $n \geqslant 2$.

Tällöin pätee:

Rekursiivisen jonon raja-arvo. Jos jonolla (a_n) on raja-arvo a ja jos funktio g on jatkuva kohdassa a, niin

$a = g(a)$.*

* Raja-arvo a on siis funktion g niin sanottu kiintopiste.

Perustelu. Jos $\lim_{n \to \infty} a_n = a$, niin myös $\lim_{n \to \infty} a_{n-1} = a$, sillä jonon (a_{n-1}) jäsenet ovat jonon (a_n) jäsenet eri tavalla indeksoituina.

Siis

$$a = \lim_{n \to \infty} a_n \qquad a_n = g(a_{n-1})$$

$$= \lim_{n \to \infty} g(a_{n-1}) \qquad \text{Funktio } g \text{ on jatkuva kohdassa } a.$$

$$= g\left(\lim_{n \to \infty} a_{n-1}\right) \qquad \lim_{n \to \infty} a_{n-1} = a$$

$$= g(a).$$

ESIMERKKI 7

On mahdollista osoittaa (ei kuitenkaan tämän kurssin keinoin), että jono

$$a_1 = 2 \text{ ja } a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{3}{a_{n-1}}\right), \text{ kun } n \geqslant 2,$$

suppenee kohti positiivista raja-arvoa.

a) Mikä jonon raja-arvo on?

b) Laske jonon avulla raja-arvon likiarvo.

Ratkaisu

a) Jonossa (a_n) on $a_n = g(a_{n-1})$, missä $g(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right)$.

Funktio g on jatkuva joukossa $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Jos jonon (a_n) raja-arvo on a, niin

$$a = g(a)$$

$$a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{3}{a}\right) \qquad \big| \cdot 2$$

$$2a = a + \frac{3}{a} \qquad \big| \cdot a$$

$$2a^2 = a^2 + 3$$

$$a^2 = 3$$

$a = \sqrt{3}$ tai $a = -\sqrt{3}$.

Koska raja-arvo on positiivinen, raja-arvo on $\sqrt{3}$.

b) Laskemalla jonon

$$a_1 = 1 \text{ ja } a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{3}{a_{n-1}}\right)$$

jäseniä (laskimen [Ans] -näppäin) saadaan nopeasti tarkentuvia luvun $\sqrt{3}$ likiarvoja.

$a_1 = 2$
$a_2 = 1{,}75$
$a_3 \approx 1{,}732\,142\,857\,14$
$a_4 \approx 1{,}732\,050\,810\,01$
$a_5 \approx 1{,}732\,050\,807\,57$
$a_6 \approx 1{,}732\,050\,807\,57$

Viidennestä jäsenestä alkaen jonon jäsenet ovat laskimen tarkkuudella yhtä suuria. On saatu 11-desimaalinen likiarvo luvulle $\sqrt{3}$.*

Vastaus a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{3} \approx 1{,}732\,050\,807\,57$

---

* Käytettyä menetelmää laskea likiarvoja rekursiivisen jonon avulla kutsutaan *iteroimiseksi*. Menetelmään perehdytään tarkemmin syventävässä kurssissa Numeerisia ja algebrallisia menetelmiä. Laskimet laskevat neliöjuurten likiarvoja niihin ohjelmoitujen iterointikaavojen avulla.

TEHTÄVIÄ

SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

229. Suppeneeko vai hajaantuuko lukujono (a_n)? Jos jono suppenee, mikä jonon raja-arvo on?

a) vakiojono $a_n = 2$ b) $a_n = \frac{3}{n}$

c) $a_n = \frac{n}{3}$ d) $a_n = \left(-\frac{3}{2}\right)^n$

e) $a_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n$

230. Määritä lukujonon raja-arvo.

a) $a_n = \frac{4^n}{7 \cdot 3^n}$ b) $b_n = \frac{7 \cdot 3^n - 5 \cdot 2^n}{4 \cdot 3^n}$

231. Määritä lukujonon raja-arvo.

a) $a_n = \frac{5n^2 - 3n + 7}{n^2}$ b) $b_n = \frac{6n^3 + 4n - 11}{n^2}$

232. Määritä.

a) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{5 - 3n}{1 + 2n}$ b) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{5 - 3n}{1 + 2n^2}$

c) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{5 - 3n^2}{1 + 2n}$

233. Mikä lukujonon $a_n = \frac{3n - 1}{n + 4}$ raja-arvo on? Mistä n:n arvosta lähtien jonon jäsenet eroavat raja-arvosta vähemmän kuin 0,001?

234. Jonon (a_n) jäsenet ovat muotoa

$a_n = \frac{2n + 5}{n + 3}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

a) Osoita, että $a_n < 2$ kaikilla n.

b) Osoita tutkimalla erotusta $a_{n+1} - a_n$, että lukujono (a_n) on aidosti kasvava eli $a_{n+1} > a_n$ kaikilla n.

c) Määritä jonon a_n raja-arvo.

235. Anna esimerkki lukujonosta, jonka raja-arvo on 3 ja

a) joka on aidosti kasvava

b) joka on aidosti vähenevä

c) joka ei ole kasvava eikä vähenevä.

236. Mikä jonon (a_n) raja-arvo on, kun

a) $a_n = \frac{(5n^2 + 2)^3}{(10n^2 + n)^3}$

b) $a_n = \sin\left(\frac{3n\pi + 2}{2n + 1}\right)$?

237. Määritä jonon raja-arvo.

a) $a_n = \frac{\sqrt{9n^2 + 4}}{n}$ b) $b_n = \frac{5n}{\sqrt{n^3 + 1}}$

238. Määritä.

a) $\lim\limits_{n \to \infty} (\sqrt{n^2 + 5n} + n)$

b) $\lim\limits_{n \to \infty} (\sqrt{n^2 + 5n} - n)$

239. Osoita, että jono (a_n) suppenee kohti raja-arvoa 0.

a) $a_n = \frac{\cos n}{n^2}$ b) $a_n = 4\,(-0{,}7)^n \sin 3n$

240. Voidaan osoittaa, että jono

$a_1 = 1$ ja $a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{5}{a_{n-1}^2}\right)$, kun $n \geqslant 2$,

suppenee kohti positiivista raja-arvoa.

a) Mikä jonon raja-arvo on?

b) Laske jonon avulla raja-arvon likiarvo.

SARJA II. PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

241. Määritä jonon raja-arvo.

a) $a_n = \frac{4}{n} - \frac{5}{n^2}$ b) $b_n = 2 + 3 \cdot (-1)^n$

c) $c_n = 1 - e^{-n}$

242. Määritä.

a) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{5 - 2^n}{3^n}$ b) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{10 \cdot 3^n + 6 \cdot 5^n}{4 \cdot 5^n}$

243. Määritä jonon (a_n) raja-arvo.

a) $a_n = \frac{1 + 2n}{-2 + 5n}$ b) $a_n = \frac{2n + 3}{n^2 - 6n}$

c) $a_n = \frac{2n^2 + 3}{n - 6}$

244. Määritä $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

a) $a_n = n - \frac{n^2}{n + 3}$ b) $a_n = n - \frac{n^3 - 4n^2}{n^2 + 1}$

245. Mistä n:n arvosta lähtien jonon $a_n = \left(-\frac{88}{89}\right)^n$ jäsenten etäisyys jonon raja-arvosta on pienempi kuin 0,001?

246. Mikä on lukujonon $a_n = \frac{n - 1}{2n + 5}$ raja-arvo? Mistä n:n arvosta alkaen jonon jäsenten etäisyys raja-arvosta on pienempi kuin 10^{-5}?

247. Lukujonossa (a_n) on

$a_n = \frac{3n + 7}{n + 1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

a) Osoita, että $a_n > 3$ kaikilla n.

b) Osoita, että jono (a_n) on aidosti vähenevä.

c) Määritä jonon (a_n) raja-arvo.

248. Määritä jonon (a_n) raja-arvo.

a) $a_n = \frac{(3n - 2)^5}{(6n + 7)^5}$ b) $a_n = \cos \frac{4n\pi}{12n + 5}$

249. Määritä jonon (a_n) raja-arvo.

a) $a_n = n\sqrt{\frac{3}{n^2} + \frac{4}{n^3}}$ b) $a_n = \frac{\sqrt{18 + n^4}}{3n^2}$

250. Mikä on jonon (a_n) raja-arvo, kun

a) $a_n = \ln(n + 2) - \ln n$

b) $a_n = \ln(3n^2 + 5n) - \ln(n^2 + 4)$?

251. Määritä $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 5n}\right)$.

252. Pitääkö väite paikkansa? Perustele todeksi tai osoita vastaesimerkillä vääräksi.

a) Jos $a_n > 0$ kaikilla n ja $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$, niin $a > 0$.

b) Jos $a_n \geqslant 0$ kaikilla n ja $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$, niin $a \geqslant 0$.

c) Jos $a_n \geqslant 0$ kaikilla n ja jono (a_n) on aidosti vähenevä, niin $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

253. Määritä $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

a) $a_n = \frac{1 + \sin n}{n}$ b) $a_n = \frac{\sin^n n}{2^n}$

254. Voidaan osoittaa, että jono

$a_1 = 1$ ja $a_n = 1 + \dfrac{3}{a_{n-1}}$, kun $n \geqslant 2$,

suppenee kohti positiivista raja-arvoa. Mikä jonon raja-arvo on?

255. Osoita, että jono

$a_1 = \dfrac{1}{9}$ ja $a_n = a_{n-1}^2 + \dfrac{1}{2}$, kun $n \geqslant 2$,

hajaantuu.

256. Olkoon jono (a_n) Fibonaccin jono: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ ja $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, kun $n \geqslant 3$. Tutkitaan jonon peräkkäisten jäsenten suhdetta

$b_n = \dfrac{a_n}{a_{n-1}}$.

a) Kuvaile jono (b_n) rekursiivisesti.

b) Voidaan osoittaa, että jono (b_n) suppenee. Mikä jonon (b_n) raja-arvo on?

257. Osoita, että jono (a_n) suppenee kohti raja-arvoa 0.

a) $a_n = \dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$

b) $a_n = \dfrac{100^n}{n^n}$

258. Funktion f derivaatta kohdassa a on erotusosamäärän raja-arvo:

$f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$. Koska jonon $(\frac{1}{n})$ raja-arvo on nolla, niin derivaatta, jos se on olemassa, on myös lukujonon raja-arvo:

$$f'(a) = \lim_{n \to \infty} \frac{f\left(a + \frac{1}{n}\right) - f(a)}{\frac{1}{n}}.$$

Tunnista seuraavien lukujonojen raja-arvot derivaatoiksi ja päättele raja-arvo laskemalla derivaatta.

a) $a_n = n(3^{\frac{1}{n}} - 1)$ b) $a_n = n \ln(1 + \dfrac{1}{n})$

259. Lukujono $(1 + \frac{1}{n})^n$ on yksi matematiikan tärkeimmistä lukujonoista. Käytä hyväksi edellisen tehtävän b-kohtaa ja määritä $\lim\limits_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$.

Päättele edelleen seuraavat raja-arvot.

a) $\lim\limits_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^{2n}$ b) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$

c) $\lim\limits_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{2n})^n$ d) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{3n}{3n+1}\right)^n$

260. Oletetaan, että jonon a_1, a_2, a_3, ... kaikki jäsenet ovat positiivisia. Osoita: jos on olemassa sellainen luku q, $0 < q < 1$, että jostain n:n arvosta n_1 alkaen $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q$, niin jono

a_1, a_2, a_3, ... suppenee kohti raja-arvoa 0.

(Vihje: Käytä hyväksi supistusoivallusta

$a_{n+p} = \dfrac{a_{n+p}}{a_{n+p-1}} \cdot \dfrac{a_{n+p-1}}{a_{n+p-2}} \cdot \ldots \cdot \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \cdot a_n$.)

Käytä tulosta hyväksi ja osoita, että

a) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{3^n}{n!} = 0$ b) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n}{3^n} = 0$

c) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^2}{2^n} = 0$.

261. Käytä hyväksi edellisen tehtävän tulosta ja osoita, että $\lim\limits_{n \to \infty} nq^n = 0$, kun $-1 < q < 1$.

262. Lukujono on *rajoitettu*, jos se on sekä yläpuolelta että alapuolelta rajoitettu eli jos on olemassa sellaiset luvut M ja m, että $a_n < M$ kaikilla n (yläpuolelta rajoitettu) ja $a_n > m$ kaikilla n (alapuolelta rajoitettu).

Pitävätkö seuraavat väitteet paikkansa? Perustele todeksi tai osoita vastaesimerkillä vääräksi.

a) Jos jono (a_n) on rajoitettu, se suppenee.

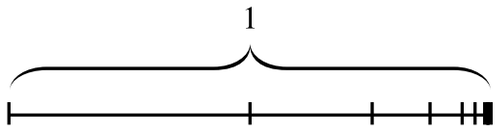
b) Jos jono (a_n) suppenee, se on rajoitettu.

c) Jos jono (a_n) ei ole rajoitettu, se hajaantuu.

Sarja

Ongelma

a)



Kuviossa on ykkösen pituinen jana puolitettu, toinen puolikas edelleen puolitettu jne. Päättele kuvion avulla, mitä lukua geometrisen jonon $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ jäsenten summa $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$ lähenee, kun yhteenlaskettavien lukumäärä lisääntyy.

b) Lasketaan yhteen positiivisten kokonaislukujen jonon $1,\ 2,\ 3, \ldots$ jäseniä. Mitä lukua summa $1 + 2 + 3 + \ldots$ lähenee, kun yhteenlaskettavien lukumäärä lisääntyy?

Olkoon (a_k) lukujono. Lasketaan yhteen yhä useampia ja useampia jonon jäseniä:

$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$.

Ongelmana on tutkia, läheneekö summan arvo tällöin jotain lukua.

Täsmennetään ongelma raja-arvon käsitteen avulla.

Muodostetaan yhä useamman ja useamman lukujonon jäsenen summa.

$S_1 = a_1$
$S_2 = a_1 + a_2$
$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$
$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$
jne.

Näin saadaan lukujono (S_n), jonka n. jäsen on jonon (a_k) n:n ensimmäisen jäsenen summa:

$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Sarjan määritelmä

Lukujono (S_n) on jonoon (a_k) liittyvä *sarja*. Jonoon (a_k) liittyvää sarjaa merkitään

$a_1 + a_2 + a_3 + ...$

tai

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Jonon (S_n) jäseniä $S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2,\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3$ jne. kutsutaan sarjan

$a_1 + a_2 + a_3 + ...$

osasummiksi.

Jonon (a_k) jäseniä $a_1,\ a_2,\ a_3, ...$ kutsutaan sarjan

$a_1 + a_2 + a_3 + ...$

termeiksi.

Sarjan summa

Jos sarjan

$a_1 + a_2 + a_3 + ...$

osasummien jono (S_n) suppenee kohti raja-arvoa S, niin sanotaan, että sarja

$a_1 + a_2 + a_3 + ...$

suppenee ja että sarjan *summa* on S. Merkitään

$a_1 + a_2 + a_3 + ... = S$

tai

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S.$$

Jos osasummien jono (S_n) hajaantuu, niin sanotaan, että sarja

$a_1 + a_2 + a_3 + ...$

hajaantuu.

ESIMERKKI 1

Suppeneeko vai hajaantuuko sarja? Jos sarja suppenee, niin mikä sen summa on?

a) $1 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{5} + \ldots$

b) $1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_{\text{2 kpl}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}}_{\text{3 kpl}} + \ldots$

Ratkaisu

a) Lasketaan sarjan $1 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{5} + \ldots$ osasummia.

$S_1 = 1$

$S_2 = 1 - 1 = 0$

$S_3 = 1 - 1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

$S_4 = 1 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$

$S_5 = 1 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$

$S_6 = 1 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{5} = 0$

jne.

Joka toisen osasumman arvo on 0, sillä

$S_n = 0$, kun n on parillinen.

Myös parittomat osasummat lähenevät lukua 0, sillä

$S_n = \frac{1}{n}$, kun n on pariton,

ja $\frac{1}{n} \to 0$, kun $n \to \infty$.

Siis $S_n \to 0$, kun $n \to \infty$.

Sarja $1 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{5} + \ldots$ suppenee, ja sen summa on 0 eli

$$1 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{5} + \ldots = 0.$$

b) Lasketaan sarjan $1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_{\text{2 kpl}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}}_{\text{3 kpl}} + \ldots$ osasummia.

$S_1 = 1$

$S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$

$S_6 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 3$

Edelleen on:

$S_{10} = S_6 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 3 + 1 = 4$

$S_{15} = 4 + 1 = 5$

jne.

Jos m on mikä tahansa positiivinen kokonaisluku, niin sarjalla on osasumma S_n, jolle $S_n = m$. Siis $S_n \to \infty$, kun $n \to \infty$.

Sarja hajaantuu.

Vastaus a) Suppenee, $1 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{5} + \ldots = 0$. b) Hajaantuu.

Sarjan $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ osasumma

$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$

saadaan edellisestä osasummasta

$S_{n-1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}$

lisäämällä termi a_n:

$S_n = S_{n-1} + a_n$.

Siis

$a_n = S_n - S_{n-1}$.

Oletetaan, että sarja $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ suppenee ja sarjan summa on S. Tällöin on $\lim_{n \to \infty} S_n = S$ ja $\lim_{n \to \infty} S_{n-1} = S$, joten

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \to \infty} S_n - \lim_{n \to \infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

On osoitettu seuraava suppenevan sarjan ominaisuus:

Suppenevan sarjan termien raja-arvo on nolla

> Jos sarja $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ suppenee, niin
>
> $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

Tuloksesta ei seuraa, että sarja, jonka termien raja-arvo on nolla, aina suppenee, sillä myös hajaantuvan sarjan termien raja-arvo saattaa olla nolla. Tällainen sarja oli esimerkin 1 b-kohdassa. Sen sijaan tuloksen avulla voidaan joskus osoittaa, että sarja hajaantuu, sillä tuloksesta seuraa:

> Jos jono (a_n) hajaantuu tai jos $\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$,
> niin sarja $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ hajaantuu.

ESIMERKKI 2

Suppeneeko sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1}$?

Ratkaisu

Määritetään sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \ldots$ termien raja-arvo.

$$\lim_{k \to \infty} \frac{k}{k+1} = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{k}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

Koska termien raja-arvo ei ole 0, sarja ei suppene.

Vastaus

Ei suppene.

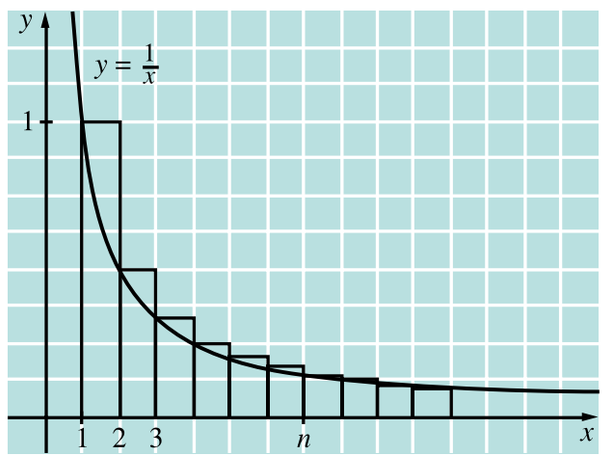
Sarjoja voidaan joissain tilanteissa tutkia pinta-alojen ja integraalilaskennan avulla.

ESIMERKKI 3

Positiivisten kokonaislukujen käänteislukujen muodostama sarja

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$

on niin sanottu *harmoninen sarja*. Käytä hyväksi viereistä kuviota, jossa on funktion $\frac{1}{x}$ kuvaaja, ja osoita integraalilaskennan avulla, että harmoninen sarja hajaantuu.



Ratkaisu

Harmonisen sarjan termit $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}$ jne. ovat funktion $\frac{1}{x}$ kuvaajaa ulkopuolelta myötäilevien ykkösen levyisten pylväiden pinta-aloja.

Harmonisen sarjan n. osasumma

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$$

on suurempi kuin sen alueen pinta-ala, jonka funktion $\frac{1}{x}$ kuvaaja ja x-akseli rajaavat välillä $[1, n + 1]$. Alueen pinta-ala on funktion $\frac{1}{x}$ määrätty integraali $\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

Siis

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} > \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Lasketaan määrätyn integraalin arvo.

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \Big/_1^{n+1} \ln|x| = \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1) - 0 = \ln(n+1)$$

Saatiin epäyhtälö:

$S_n > \ln(n + 1)$.

Koska $\ln(n + 1) \to \infty$, kun $n \to \infty$, niin myös $S_n \to \infty$, kun $n \to \infty$.

Koska harmonisen sarjan $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ...$ osasummat suurenevat rajatta, sarja hajaantuu. □

TEHTÄVIÄ

SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

263. Muodosta sarjan $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ eli sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}$ osasummien jono. Suppeneeko vai hajaantuuko sarja?*

264. Tutki sarjan suppenemista.

a) $\underbrace{\frac{1}{2}}_{1\text{ kpl}} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{2\text{ kpl}} + \underbrace{\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}}_{3\text{ kpl}} + \ldots$

b) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \ldots$

265. Mikä on sarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \frac{4}{9} + \ldots$$

yleisen termin a_n lauseke? Tutki, suppeneeko sarja. (Ylioppilaskoe, s. 2004)

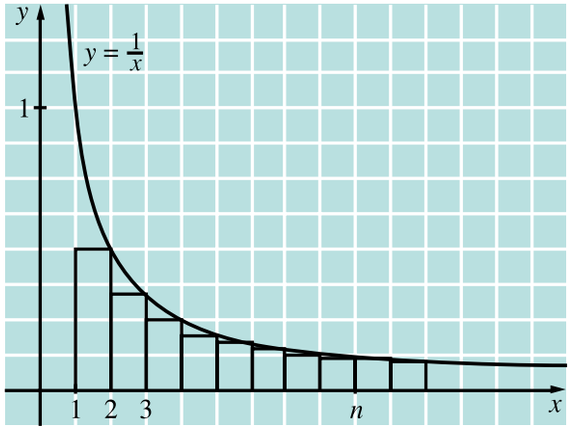
266. Määritä sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)$ ensimmäisiä osasummia ja päättele n. osasumman S_n lauseke. Mikä sarjan summa on?

---

* Tämän sarjan summasta matemaatikot kiistelivät ankarasti 1700-luvulla, kun sarjoja ajateltiin ”päättymättöminä summina”. Joidenkin mielestä sarjan summa oli 0, koska $(1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = 0$, toisten mielestä yhtä hyvin 1, koska $1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \ldots = 1$, ja kolmansien mielestä keskiarvo $\frac{1}{2}$. Kiista ratkesi, kun raja-arvon käsite täsmentyi ja sarjan summa ymmärrettiin osasummien jonon raja-arvoksi.

267. Sarjan $\frac{1}{100} + \frac{1}{200} + \ldots$ jäsenet ovat luvun 100 peräkkäisten monikertojen käänteislukuja. Osoita harmonisen sarjan avulla, että sarja hajaantuu.

268. Olkoon S_n harmonisen sarjan $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$ n. osasumma. Esimerkissä 3 osoitettiin, että $S_n > \ln(n + 1)$. Käytä hyväksi oheista kuviota, ja osoita pinta-alojen ja määrätyn integraalin avulla, että $S_n < 1 + \ln n$. Muodosta näiden kahden epäyhtälön avulla arvio harmonisen sarjan a) miljoonan b) miljardin ensimmäisen jäsenen summalle.**



** Harmonisen sarjan osasummia voidaan siis arvioida funktion $\ln x$ arvojen avulla. On olemassa myös täsmällistä tietoa arvion tarkkuudesta suurilla n:n arvoilla. Voidaan nimittäin osoittaa, että lukujono $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$ suppenee. Jonon raja-arvo $\gamma = 0{,}577\,215\,664\ldots$ on matematiikassa tärkeä *Eulerin vakio*. Eulerin vakion γ likiarvo tunnetaan satojen tuhansien desimaalien tarkkuudella. Vakioon liittyy myös tärkeä toistaiseksi ratkaisematon ongelma. Ei tiedetä, onko luku γ rationaali- vai irrationaaliluku. Tiedetään vain, että jos luvulla γ on murtolukumuoto $\frac{m}{n}$, niin nimittäjän n täytyy olla suurempi kuin $10^{250\,000}$.

269. Harmoninen sarja $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$ voidaan osoittaa hajaantuvaksi myös seuraavalla päättelyllä:

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{(\frac{1}{3} + \frac{1}{4})}_{> 2 \cdot \frac{1}{4}} + \underbrace{(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8})}_{> 4 \cdot \frac{1}{8}} + \ldots .$$

Millainen epäyhtälö näin saadaan harmonisen sarjan osasummalle

a) S_{16} b) S_{32} c) S_{2^n} d) $S_{1048576}$?

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

270. Muodosta sarjan $1 - 3 + 5 - 7 + 9 - \ldots$ osasummien jono. Suppeneeko vai hajaantuuko sarja?

271. Tutki sarjan $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \ldots$ suppenemista.

272. Määritä sarjan $\lg 2 + \lg \frac{3}{2} + \lg \frac{4}{3} + \ldots$ n. osasumma S_n ja tutki sarjan suppenemista.

273. Sarjan $\frac{1}{4} + \frac{3}{7} + \frac{5}{10} + \ldots$ termien osoittajat kasvavat aina kahdella ja nimittäjät kolmella. Suppeneeko sarja?

274. Suppeneeko sarja $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k}{10k+1}$?

275. Suppeneeko vai hajaantuuko sarja? Jos sarja suppenee, niin mikä sen raja-arvo on?

a) $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \ldots$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+2}})$

276. Mikä on sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \ldots$$

yleisen termin a_k lauseke? Osoita, että

$a_k = \frac{1}{2}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2})$, ja määritä sarjan summa.

277. a) Osoita pinta-alojen ja määrätyn integraalin avulla, että sarja

$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots$ hajaantuu.

b) Määritä tehtävän 268 epäyhtälöitä vastaava arvio sarjan

$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots$ n:n ensimmäisen jäsenen summalle. Minkä arvion saat miljoonan ensimmäisen jäsenen summalle?

278. Olkoon

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Osoita, että

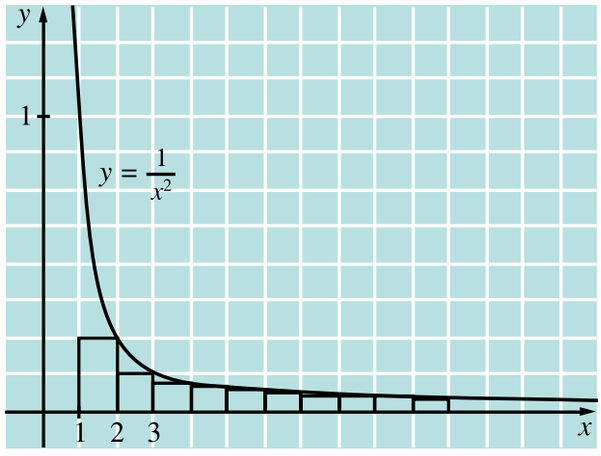
$\ln(2n+1) - \ln(n+1) < a_n < \ln 2$ kaikilla n,

ja määritä $\lim_{n \to \infty} a_n$.

279. Sarja voidaan joskus osoittaa suppenevaksi seuraavan tärkeän tuloksen avulla: jos sarjan kaikki termit ovat positiivisia ja sarjan osasummien jono on ylhäältä rajoitettu, niin sarja suppenee. Siis, jos $a_k > 0$ kaikilla k ja on olemassa sellainen luku M, että $S_n < M$ kaikilla n, niin sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee. Tulos perustuu lukusuoran syvällisempiin ominaisuuksiin, ja sitä ei tässä kurssissa perustella eikä myöskään muualla käytetä.

a) Käytä hyväksi edellä kerrottua tulosta ja alla olevaa kuviota, ja osoita, että sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ suppenee.

b) Osoita, että sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ suppenee, kun $p > 1$.*



280. Jos laskettaisiin laskimella harmonisen sarjan $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$ summaa lisäämällä yhä uusia termejä yksi kerrallaan, niin ennen pitkää laskimen näytössä oleva luku ei enää muuttuisi, eli sarja näyttäisi suppenevan. Miksi näin käy? Arvioi, minkä luvun laskin, jossa on 12 numeron näyttö ja joka laskee 14 numeron tarkkuudella, näyttäisi sarjan summaksi.

---

* Tämän tehtävän menetelmillä voidaan osoittaa, että sarja suppenee, mutta ei löydetä sarjan summaa. Muilla keinoin voidaan löytää a-kohdan sarjan summa $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$ ja b-kohdan sarjoista esimerkiksi $\frac{1}{1^{26}} + \frac{1}{2^{26}} + \frac{1}{3^{26}} + \ldots = \frac{2^{24} \cdot 76977927 \cdot \pi^{26}}{27!}$. Kummankin sarjan summassa esiintyy luku π. Sarjat, joiden summassa esiintyy π, ovat tärkeitä, koska niiden avulla voidaan laskea luvun π likiarvoja. Muita tällaisia sarjoja ovat esimerkiksi $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4}$ ja $\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7 \cdot 8} - \ldots = \frac{\pi - 3}{4}$.

Geometrinen sarja

ESIMERKKI 1

Laske sarjan $2+\frac{2}{7}+\frac{2}{7^2}+\frac{2}{7^3}+\ldots$ n. osasumma S_n. Suppeneeko sarja? Mikä sarjan summa on?

Ratkaisu

Jono $2,\ \frac{2}{7},\ \frac{2}{7^2},\ \frac{2}{7^3},\ldots$ eli jono $2,\ 2\cdot\frac{1}{7},\ 2\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^2,\ 2\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^3,\ldots$ on geometrinen jono, jonka peräkkäisten jäsenten suhde $q=\frac{1}{7}$.

Jonon n:n ensimmäisen jäsenen summa on

$$S_n = 2+2\cdot\frac{1}{7}+2\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^2+\ldots+2\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{2\left(1-\left(\frac{1}{7}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{7}}$$

$S_n=\frac{a(1-q^n)}{1-q}$, missä $a=2$ on jonon ensimmäinen jäsen ja $q=\frac{1}{7}$.

$$= \frac{2\left(1-\left(\frac{1}{7}\right)^n\right)}{\frac{6}{7}}$$

$$= 2\left(1-\left(\frac{1}{7}\right)^n\right)\cdot\frac{7}{6} = \frac{7}{3}\left(1-\left(\frac{1}{7}\right)^n\right).$$

Koska $-1<\frac{1}{7}<1$, niin $\left(\frac{1}{7}\right)^n\to 0$, kun $n\to\infty$, joten

$$S_n=\frac{7}{3}\left(1-\left(\frac{1}{7}\right)^n\right)\to\frac{7}{3}(1-0)=\frac{7}{3},\ \text{kun}\ n\to\infty.$$

Sarja $2+\frac{2}{7}+\frac{2}{7^2}+\frac{2}{7^3}+\ldots$ suppenee, ja sarjan summa on $\frac{7}{3}$.

Vastaus

$S_n=\frac{7}{3}\left(1-\left(\frac{1}{7}\right)^n\right)$, sarja suppenee, sarjan summa on $\frac{7}{3}$.

Geometrinen jono ja summa

Jono $a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots$ on *geometrinen*, jos jonon peräkkäisten jäsenten suhde on aina sama eli jos on olemassa sellainen luku q, että

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

kaikilla n.

Kun merkitään $a_1 = a$, geometrinen jono voidaan kirjoittaa muodossa

$a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3, \ldots,$

missä $a \neq 0$.

Myös jono $a,\ 0,\ 0,\ 0, \ldots$, jossa $a \neq 0$ ja $q = 0$, luetaan geometristen jonojen joukkoon, vaikka lukua q ei tällöin voida tulkita peräkkäisten jäsenten suhteeksi.

Geometrisen jonon

$a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3, \ldots$

n:n ensimmäisen jäsenen summa

$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1}$

voidaan laskea kaavalla

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}.$$

Kaavassa
a on summan ensimmäinen jäsen,
q on jonon peräkkäisten jäsenten suhdeluku,
n on yhteenlaskettujen jäsenten lukumäärä.

Kaava pätee, kun $q \neq 1$.

Jos $q = 1$, jono on vakiojono

$a,\ a,\ a, \ldots,$

jonka n:n ensimmäisen jäsenen summa on na.

Geometrinen sarja

Sarja $a + aq + aq^2 + \ldots$, jonka termit muodostavat geometrisen jonon, on *geometrinen sarja*.

Tutkitaan geometrisen sarjan suppenemista.

Oletetaan, että $q \neq 1$. Tällöin geometrisen sarjan $a + aq + aq^2 + \ldots$ n. osasumma on

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = \frac{a(1-q^n)}{1-q}.$$

Jos $-1 < q < 1$, jono (q^n) suppenee kohti raja-arvoa 0, joten

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} \to \frac{a(1-0)}{1-q} = \frac{a}{1-q}, \text{ kun } n \to \infty.$$

Jos $q \leqslant -1$ tai $q > 1$, jono (q^n) hajaantuu. Tällöin myös osasummien jono (S_n) hajaantuu.

Oletetaan, että $q = 1$. Tällöin sarjan n. osasumma on $S_n = na$, joten osasummien jono (S_n) hajaantuu.

Geometrisen sarjan suppenemisehto ja summan kaava

Geometrinen sarja $a + aq + aq^2 + \ldots$ suppenee, jos ja vain jos $-1 < q < 1$.

Suppenevan geometrisen sarjan summa on

$$S = \frac{a}{1-q}.$$

Kaavassa
a on sarjan ensimmäinen termi,
q on jonon peräkkäisten termien suhdeluku.

Geometrisen sarjan suppenemisehto $-1 < q < 1$ voidaan ilmaista myös itseisarvon avulla:

Suppenemisehto itseisarvon avulla

Geometrinen sarja $a + aq + aq^2 + \ldots$ suppenee,
jos ja vain jos luvun q itseisarvo on pienempi kuin 1 eli
$|q| < 1$.

ESIMERKKI 2

Tutki, suppeneeko sarja. Jos sarja suppenee, niin määritä sen summa.

a) $\frac{2}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} - \frac{2}{3^4} + \ldots$ b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^{2k}}$ c) $\sum_{k=0}^{\infty} 3^k$

Ratkaisu

a) Geometrisen sarjan

$$\frac{2}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} - \ldots = 2 \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 - \ldots$$

peräkkäisten termien suhdeluku $q = -\frac{1}{3}$. Koska $-1 < -\frac{1}{3} < 1$, sarja suppenee.

Sarjan summa on

$$S = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}}$$

Kaavaan $S = \frac{a}{1-q}$ sijoitetaan $a = \frac{2}{3}$ ja $q = -\frac{1}{3}$.

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}.$$

b) Geometrisen sarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^{2k}} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^6} + \ldots$$

peräkkäisten termien suhdeluku $q = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$.

Koska $-1 < \frac{1}{9} < 1$, sarja suppenee, ja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^{2k}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{9}}$$

Kaavaan $\frac{a}{1-q}$ sijoitetaan $a = 1$ ja $q = \frac{1}{9}$.

$$= \frac{1}{\frac{8}{9}} = 1 \cdot \frac{9}{8} = \frac{9}{8}.$$

c) Geometrisen sarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty} 3^k = 1 + 3 + 3^2 + \ldots$$

peräkkäisten termien suhdeluku $q = 3$. Suhdeluku ei toteuta suppenemisehtoa $-1 < q < 1$, joten sarja hajaantuu.

Vastaus

a) Suppenee, summa on $\frac{1}{2}$.

b) Suppenee, summa on $\frac{9}{8}$.

c) Sarja hajaantuu.

ESIMERKKI 3

Ystävykset heittävät vuorotellen noppaa. Voittaja on se, joka saa ensimmäisen kuutosen. Millä todennäköisyydellä aloittaja voittaa?

Ratkaisu

Olkoon A aloittaja ja B toinen pelaaja. Tapahtuma ”A heittää ensimmäisen kuutosen” jakautuu äärettömän moneen toisensa poissulkevaan tapahtumaan:
”A heittää ensimmäisen kuutosen ensimmäisellä kierroksella” tai
”A heittää ensimmäisen kuutosen toisella kierroksella” tai ... .

tapahtuma	todennäköisyys
A heittää 6	$\frac{1}{6}$
A heittää muun kuin 6 ja B heittää muun kuin 6 ja A heittää 6	$\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$
A heittää muun kuin 6 ja B heittää muun kuin 6 ja A heittää muun kuin 6 ja B heittää muun kuin 6 ja A heittää 6	$\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$
jne.	

Koska tapahtumat ovat toisensa poissulkevat, kysytty todennäköisyys on summa

$$\frac{1}{6} + (\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}) \cdot \frac{1}{6} + (\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}) \cdot (\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}) \cdot \frac{1}{6} + \ldots$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{25}{36} \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{25}{36}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \ldots .$$

Kyseessä on geometrinen sarja, jonka peräkkäisten termien suhdeluku $q = \frac{25}{36}$. Koska $-1 < \frac{25}{36} < 1$, sarja suppenee.

Todennäköisyys, että aloittaja saa ensimmäisen kuutosen, on

$$S = \frac{\frac{1}{6}}{1 - \frac{25}{36}} \qquad S = \frac{a}{1-q}, \text{ missä } a = \frac{1}{6} \text{ ja } q = \frac{25}{36}.$$

$$= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{11}{36}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{36}{11} = \frac{6}{11} \approx 0{,}545.$$

Vastaus $\frac{6}{11} \approx 0{,}545$

ESIMERKKI 4

Millä muuttujan x arvoilla sarja suppenee?
Määritä summafunktio $S(x)$.

a) $1 + \frac{x}{1-x} + \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 + \ldots$ b) $\sum_{k=1}^{\infty} \sin^{2k} x$

Ratkaisu a) Sarja

$$1 + \frac{x}{1-x} + \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 + \ldots$$

on määritelty, kun nimittäjänä oleva lauseke $1 - x$ on eri suuri kuin 0 eli kun $x \neq 1$.

Sarja on geometrinen sarja, jonka termien suhde $q = \frac{x}{1-x}$.

Sarja suppenee, kun $|q| < 1$ eli kun

$$\left|\frac{x}{1-x}\right| < 1$$

$$\frac{|x|}{|1-x|} < 1 \qquad | \cdot |1-x| > 0$$

$$|x| < |1-x|.$$

Koska epäyhtälön molemmat puolet ovat epänegatiiviset, epäyhtälö on yhtäpitävä neliöön korottamalla saadun epäyhtälön kanssa.

$$x^2 < (1-x)^2$$

$$x^2 < 1 - 2x + x^2$$

$$0 < 1 - 2x$$

$$2x < 1 \qquad | : 2 > 0$$

$$x < \frac{1}{2}$$

Väli $]-\infty, \frac{1}{2}[$ sisältyy määrittelyjoukkoon $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Sarja suppenee, kun $x < \frac{1}{2}$.

Sarjan summa on

$$S(x) = \frac{1}{1 - \frac{x}{1-x}} = \frac{1}{\frac{1-x}{1-x} - \frac{x}{1-x}} = \frac{1}{\frac{1-2x}{1-x}} = 1 \cdot \frac{1-x}{1-2x} = \frac{1-x}{1-2x}.$$

b) Sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin^{2k} x = \sin^2 x + \sin^4 x + \sin^6 x + \ldots$$

on geometrinen sarja, jonka peräkkäisten jäsenten suhdeluku $q = \sin^2 x$.*

---

* Kun $\sin^2 x = 0$, sarja on $0 + 0 + 0 + \ldots$, eli sarja ei ole geometrinen. Tällöin sarja suppenee, joten tapaus sisältyy seuraavaan suppenemisehtoon. Joskus tapaus $0 + 0 + 0 + \ldots$ pitää huomata käsitellä erikseen (tehtävä 289).

Sarja suppenee, kun

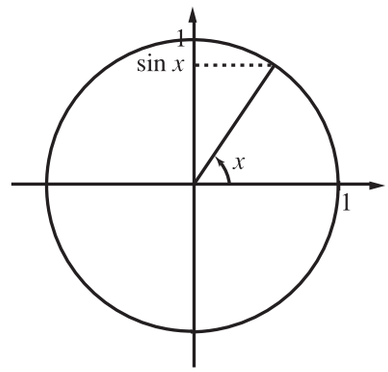
$-1 < \sin^2 x < 1$

eli kun

$\sin^2 x > -1$ ja $\sin^2 x < 1$.

Koska luvun neliö on aina epänegatiivinen, epäyhtälö $\sin^2 x > -1$ toteutuu kaikilla muuttujan x arvoilla.

Koska aina on $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, epäyhtälö $\sin^2 x < 1$ toteutuu kaikilla muilla muuttujan arvoilla, paitsi niillä arvoilla, joilla $\sin x = 1$ tai $\sin x = -1$. Nämä muuttujan arvot ovat $\frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$, missä n on kokonaisluku.



Siis sarja

$\sin^2 x + \sin^4 x + \sin^6 x + \ldots$

suppenee, kun $x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$, missä n on kokonaisluku.

Sarjan summa on

$$S(x) = \frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x} \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x. \qquad \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

Vastaus

a) Suppenee, kun $x < \frac{1}{2}$. $S(x) = \frac{1 - x}{1 - 2x}$, $x < \frac{1}{2}$.

b) Suppenee, kun $x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$, n kokonaisluku.

$S(x) = \tan^2 x$, $x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$, n kokonaisluku.

TEHTÄVIÄ

SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

281. Suppeneeko geometrinen sarja? Jos sarja suppenee, niin mikä sarjan summa on?

a) $3 + 3 \cdot \frac{2}{7} + 3 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^2 + \ldots$

b) $3 \cdot \frac{2}{5} + 3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 + \ldots$

c) $3 - 3 \cdot \frac{2}{7} + 3 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^2 - \ldots$

d) $3 \cdot 1 - 3 \cdot 7 + 3 \cdot 7^2 - \ldots$

282. Laske geometrisen sarjan summa.

a) $80 + 20 + 5 + \ldots$

b) $80 - 20 + 5 - \ldots$

283. Laske sarjan summa.

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{5^k}$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot 5^k}$

c) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{5^{2k}}$

284. Millä x:n arvolla geometrisen sarjan $1 + x + x^2 + \ldots$ summa on

a) $\frac{10}{21}$ b) $\frac{10}{19}$?

285. Epäröivä henkilö astuu ensin metrin eteenpäin, sitten puoli metriä taaksepäin, sitten $\frac{1}{4}$ metriä eteenpäin, $\frac{1}{8}$ metriä taaksepäin jne. Mitä raja-arvoa hänen etäisyytensä lähtöpaikasta lähenee?

286. Kaksi ystävystä heittää vuorotellen kolikkoa. Voittaja on se, joka saa ensimmäisen kruunan. Millä todennäköisyydellä pelin voittaa

a) aloittaja b) toisena heittävä?

287. Millä muuttujan x arvoilla sarja $1 + (1 - x^2) + (1 - x^2)^2 + \ldots$ suppenee? Mikä sarjan summa tällöin on?

288. Millä muuttujan x arvoilla sarja

$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^n$ suppenee?

Määritä summafunktio $S(x)$.*

289. Millä muuttujan arvoilla funktio

$S(x) = x(1 - x) + x(1 - x)^2 + x(1 - x)^3 + \ldots$

on määritelty? Laske sarjan summa $S(x)$ ja piirrä funktion $S(x)$ kuvaaja.

290. Mikä funktion

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{5}{6}\right)^n \sin^n x$

määrittelyjoukko on? Määritä funktion f suurin ja pienin arvo. Missä kohdissa funktio f saa suurimman ja missä kohdissa pienimmän arvon?

---

* Geometrinen sarja $a + aq + aq^2 + \ldots$ voidaan kirjoittaa summamerkin avulla muodossa $\sum_{k=0}^{\infty} aq^k$ myös silloin, kun $q = 0$. Tällöin ensimmäistä termiä aq^0 laskettaessa noudatetaan sopimusta $0^0 = 1$.

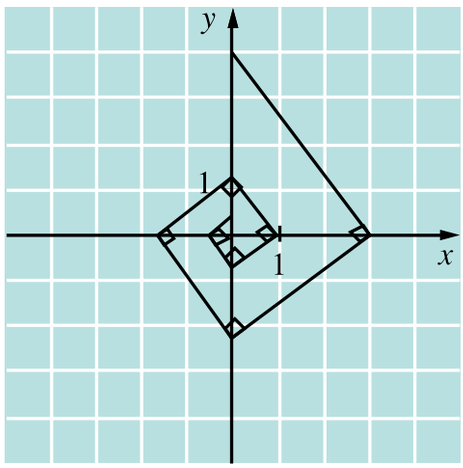
291. Jokainen luku, jonka desimaalimuoto on jaksollinen, on rationaaliluku, eli luku voidaan ilmaista murtolukumuodossa $\frac{m}{n}$, missä m ja n ovat kokonaislukuja. Murtolukumuoto voidaan löytää geometrisen sarjan summan avulla. Esimerkiksi

$$0{,}1717... = 17 \cdot 0{,}01 + 17 \cdot 0{,}0001 + ...$$
$$= 17 \cdot \frac{1}{100} + 17 \cdot \frac{1}{100^2} + ...$$

Muuta jaksollinen desimaaliluku murtolukumuotoon.

a) 0,1717... b) 0,054054... c) 0,999...

292. Lähdetään y-akselin pisteestä $(0, 4)$ ja kuljetaan suoraan x-akselin pisteeseen $(3, 0)$, käännytään $90°$ oikealle, ja kuljetaan suoraan, kunnes tullaan y-akselille, käännytään $90°$ oikealle, ja kuljetaan suoraan, kunnes tullaan x-akselille jne. Mitä raja-arvoa näin muodostuvan kulkureitin pituus lähenee?



293. Suppenevan geometrisen sarjan summa on $\frac{5}{2}$. Sarjan termien neliöiden muodostaman sarjan summa on $\frac{25}{6}$. Määritä sarjan termien kuutioiden muodostaman sarjan summa.
(Ylioppilaskoe, s. 1994)

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

294. Laske geometrisen sarjan summa.

a) $80 + 60 + 45 + ...$

b) $80 - 60 + 45 - ...$

295. Laske geometrisen sarjan summa.

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k$

b) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{3k}$

c) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^{3k}$

296. Millä q:n arvolla on

a) $1 + q + q^2 + ... = \frac{1}{3}$

b) $q + q^2 + q^3 + ... = \frac{1}{3}$?

297. Ratkaise yhtälö $x + x^3 + x^5 + ... = \frac{1}{2}$.

298. Piirretään neliön sisään jono sisäkkäisiä neliöitä yhdistämällä aina neliön vierekkäisten sivujen keskipisteet. Olkoon alkuperäisen neliön pinta-ala A ja piiri p. Mitä raja-arvoa lähenee neliön sisään piirrettyjen neliöiden a) pinta-alojen summa b) piirien summa, kun piirtämistä jatketaan ja jatketaan?

299. Kolme pelaajaa heittää vuorollaan noppaa. Joka kierroksella heittojärjestys on sama. Voittaja on se, joka heittää ensimmäisen kuutosen. Millä todennäköisyydellä pelin voittaa a) aloittaja b) toisena heittävä c) kolmantena heittävä?

300. Millä muuttujan x arvoilla geometrinen sarja $1 + \cos^2 x + \cos^4 x + \ldots$ suppenee? Mikä sarjan summa on?

301. Millä muuttujan x arvoilla sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(x+3)^k}$$ suppenee?

Määritä summafunktio $S(x)$.

302. Millä muuttujan x arvoilla sarja

$$\sin^2 x + \frac{\sin^2 x}{2 - \cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{(2 - \cos^2 x)^2} + \ldots$$

suppenee. Laske sarjan summa $S(x)$ ja piirrä funktion $S(x)$ kuvaajan välillä $[-\pi, \pi]$ oleva osa.

303. Lukusuoran piste a_3 jakaa lukusuoran pisteitä $a_1 = 0$ ja $a_2 = 9$ yhdistävän janan a_1a_2 pisteestä a_1 lukien suhteessa $1 : 2$, piste a_4 jakaa janan a_2a_3 pisteestä a_2 lukien suhteessa $1 : 2$, piste a_5 jakaa janan a_3a_4 pisteestä a_3 lukien suhteessa $1 : 2$ jne. Mitä pistettä lukusuoran pisteiden jono $a_1, a_2, a_3, \ldots$ lähenee?

304. Piste A on $30°$:n kulman kyljellä, ja pisteen A etäisyys kulman kärjestä on a. Piirretään pisteen A kautta suora, joka leikkaa kohtisuorasti kulman toisen kyljen. Piirretään tämän leikkauspisteen kautta suora, joka leikkaa kohtisuorasti ensimmäisen kyljen, taas leikkauspisteen kautta suora, joka leikkaa kohtisuorasti toisen kyljen jne. Mitä raja-arvoa kulman kylkien väliin piirtyvän murtoviivan pituus lähenee, kun piirtämistä jatketaan ja jatketaan?

305. Suppenevan geometrisen sarjan ensimmäinen termi on 3. Jos poistetaan joka toinen sarjan termi alkaen ensimmäisestä termistä, jäljelle jää sarja, jonka summa on 2. Mikä alkuperäisen sarjan summa on?

306. Suppenevan geometrisen sarjan kuuden ensimmäisen termin summa on 63. Koko sarjan summa on 64. Mikä sarja on kyseessä?

307. Olkoon S suppenevan geometrisen sarjan $a + aq + aq^2 + \ldots$ summa ja olkoon S_n sarjan n:n ensimmäisen termin summa. Muodosta lauseke erotukselle $R_n = S - S_n$. Erotukset R_n ovat sarjan niin sanottuja *jäännöstermejä*. Mistä n:n arvosta lähtien summan S_n etäisyys summasta S on pienempi kuin $0{,}001$, kun sarja on

a) $1 + 0{,}9 + 0{,}9^2 + \ldots$

b) $1 - 0{,}9 + 0{,}9^2 - \ldots$?

308. Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ määritellään seuraavasti:

$f(x) = 2^{-n}$, kun $n\pi \leqslant x \leqslant (n+1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Laske integraali

$$I(k) = \int_0^{k\pi} f(x) \sin x \, \mathrm{d}x, \text{ kun } k = 1, 2, 3, \ldots .$$

Määritä tämän jälkeen raja-arvo $\lim\limits_{k \to \infty} I(k)$.

(Ylioppilaskoe, k. 2004)

309. Kreikkalainen filosofi Zeno esitti seuraavan ongelman. Akilles lähtee ajamaan takaa kilpikonnaa, jolla on 100 metrin etumatka. Akilles juoksee kymmenen kertaa niin nopeasti kuin kilpikonna. Epäilemättä Akilles ennen pitkää saavuttaa kilpikonnan. Mutta toisaalta: Kun Akilles tulee paikkaan, jossa kilpikonna oli takaa-ajon alkaessa, kilpikonnalla on vielä 10 metrin etumatka. Kun Akilles taas etenee 10 m, kilpikonnalla on yhden metrin etumatka. Kun Akilles taas on edennyt metrin, kilpikonnalla on $0{,}1$ metrin etumatka jne. Akilles ei siis koskaan saavuta kilpikonnaa. Selitä tämä ns. *Zenon paradoksi*.

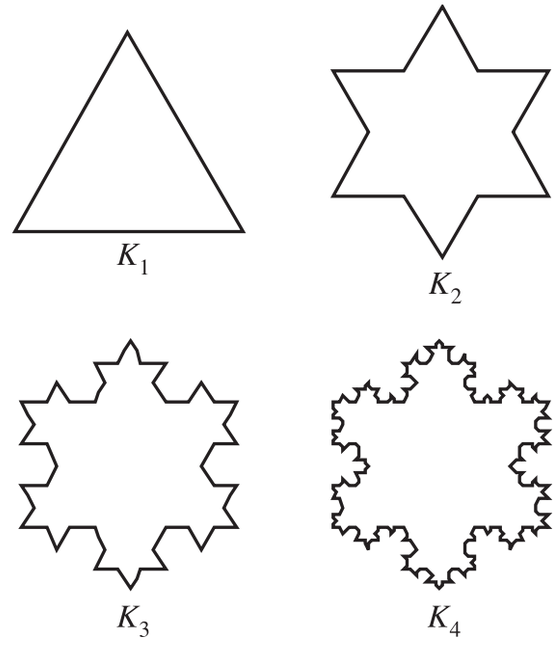
310. a) Muodosta lauseke sarjan
$1 + 2x + 3x^2 + \ldots$ n. osasummalle.
b) Käytä hyväksi tehtävää 261 sivulla 149 ja osoita, että sarja $1 + 2x + 3x^2 + \ldots$ suppenee, kun $-1 < x < 1$. Mikä sarjan summa on?

c) Määritä sarjojen $1 + \frac{2}{5} + \frac{3}{5^2} + \ldots$ ja

$1 - \frac{2}{5} + \frac{3}{5^2} - \ldots$ summat.

d) Heitetään toistuvasti noppaa. Olkoon satunnaismuuttuja X sen heiton järjestysluku, jolla saadaan ensimmäinen kuutonen. Laske satunnaismuuttujan X odotusarvo.

311. Muodostetaan jono monikulmioita K_1, K_2, K_3, ... seuraavasti: Kuvio K_1 on tasasivuinen kolmio, jonka sivujen pituus on 1. Kuvio K_2 muodostetaan kolmiosta K_1 korvaamalla jokaisen sivun keskikolmannes ulospäin piirretyllä tasasivuisella kolmiolla, kuvio K_3 muodostetaan korvaamalla kuvion K_2 jokaisen sivun keskikolmannes tasasivuisella kolmiolla jne. Pisteet, jotka ennen pitkää päätyvät kuvion sisään, muodostavat niin sanotun *Kochin lumihiutaleen*.*
a) Määritä kuvion K_n piiri P_n. Mikä kuvioiden K_{10} ja K_{50} piiri on? Suppeneeko jono (P_n)?
b) Olkoon A_n kuvion K_n pinta-ala. Määritä Kochin lumihiutaleen pinta-ala $\lim\limits_{n \to \infty} A_n$.



* Kochin lumihiutale on esimerkki *fraktaalista.*

Kertaus

Tässä luvussa kerrataan koko kurssi yksityiskohtaisten esimerkkien avulla. Teorian ja menetelmien kertauksen jälkeen on kertaustehtäviä, jotka ovat samojen otsikoiden mukaan järjestettyjä perustehtäviä. Kertausluku päättyy tehtäväsarjoihin, jotka sisältävät pääosin vaativampia tehtäviä koko kurssin alueelta.

Raja-arvo

Oletetaan, että funktio f on määritelty kohdan a ympärillä, mutta ei välttämättä kohdassa a. Funktiolla f on kohdassa a raja-arvo b, jos muuttujan arvojen lähestyessä arvoa a funktion f arvot lähestyvät lukua b.

Tällöin merkitään

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

tai

$f(x) \to b$, kun $x \to a$.

Määritetään funktion $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+13}-4}{x-3}$ raja-arvo kohdassa 3.

Funktion lauseke lavennetaan summalla $\sqrt{x+13}+4$.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+13}-4}{x-3}$$

$$= \frac{(\sqrt{x+13}+4)(\sqrt{x+13}-4)}{(\sqrt{x+13}+4)(x-3)}$$

$$= \frac{(x+13)-16}{(\sqrt{x+13}+4)(x-3)}$$

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{x-3}}}{(\sqrt{x+13}+4)\underset{1}{\cancel{(x-3)}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+13}+4}$$

$$\to \frac{1}{\sqrt{3+13}+4} = \frac{1}{4+4} = \frac{1}{8}, \text{ kun } x \to 3$$

Siis $\lim_{x \to 3} f(x) = \dfrac{1}{8}$.

Toispuoliset raja-arvot

Funktiolla f on kohdassa a vasemmanpuoleinen raja-arvo b, jos muuttujan arvojen lähestyessä vasemmalta arvoa a funktion f arvot lähestyvät lukua b. Tällöin merkitään

$$\lim_{x \to a-} f(x) = b$$

tai

$f(x) \to b$, kun $x \to a-$.

Vastaavasti määritellään oikeanpuoleinen raja-arvo ja merkinnät:

$$\lim_{x \to a+} f(x) = b$$

tai

$f(x) \to b$, kun $x \to a+$.

Funktiolla f on raja-arvo kohdassa a, jos ja vain jos sillä on kohdassa a sekä vasemmanpuoleinen että oikeanpuoleinen raja-arvo ja nämä toispuoliset raja-arvot ovat yhtä suuret.

Määritetään funktion $f(x) = \dfrac{|x-1| \ln x}{x-1}$ toispuoliset raja-arvot kohdassa 1.

Funktio f on määritelty, kun
$0 < x < 1$ tai $x > 1$.

Koska

$$|x-1| = \begin{cases} -(x-1), \text{ kun } x < 1 \\ x-1, \text{ kun } x \geqslant 1, \end{cases}$$

niin

$$f(x) = \begin{cases} -\ln x, \text{ kun } 0 < x < 1 \\ \ln x, \text{ kun } x > 1. \end{cases}$$

Funktion f vasemmanpuoleinen raja-arvo kohdassa 1 on

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} (-\ln x) = -\ln 1 = 0$$

ja oikeanpuoleinen raja-arvo on

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} \ln x = \ln 1 = 0.$$

Koska

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1+} f(x) = 0,$$

niin

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 0.$$

Funktion jatkuvuus

Oletetaan, että funktio f on määritelty jollain välillä, joka sisältää kohdan a. Funktio f on jatkuva kohdassa a, jos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Funktio $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on määritelty:

$f(x) = \dfrac{4x^2 - 36}{x + 3}$, kun $x \neq -3$, ja $f(-3) = k$.

Määritetään sellainen k:n arvo, että funktio f on jatkuva kohdassa -3.

Koska

$$\lim_{x \to -3} f(x) = \lim_{x \to -3} \frac{4x^2 - 36}{x + 3}$$

$$= \lim_{x \to -3} \frac{4(x^2 - 9)}{x + 3}$$

$$= \lim_{x \to -3} \frac{4\overset{1}{\cancel{(x+3)}}(x-3)}{\underset{1}{\cancel{x+3}}} = \lim_{x \to -3} 4(x - 3)$$

$= 4(-3 - 3) = -24$,

niin funktio f on jatkuva kohdassa -3, kun $f(-3) = -24$. Siis tulee olla $k = -24$.

Funktio f on oikeanpuoleisesti jatkuva kohdassa a, jos $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(a)$.

Funktio f on vasemmanpuoleisesti jatkuva kohdassa a, jos $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = f(a)$.

Funktio f on jatkuva kohdassa a, jos ja vain jos se on sekä oikean- että vasemmanpuoleisesti jatkuva kohdassa a.

Jos funktio f on jatkuva välillä $[a, b]$ ja päätepistearvot $f(a)$ ja $f(b)$ ovat erimerkkiset, niin Bolzanon lauseen nojalla funktiolla f on välillä $]a, b[$ (ainakin yksi) nollakohta.

Tutkitaan, onko funktio $f\colon [0, \infty[\to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 3\sqrt{x} - 5, \text{ kun } 0 \leqslant x \leqslant 4 \\ -\frac{1}{2}x + 3, \text{ kun } x > 4, \end{cases}$$

jatkuva kohdassa $x = 4$.

Funktion f arvo kohdassa 4 on
$f(4) = 3\sqrt{4} - 5 = 3 \cdot 2 - 5 = 1$.

Koska funktio $3\sqrt{x} - 5$ on jatkuva koko määrittelyjoukossaan, funktio f on vasemmanpuoleisesti jatkuva kohdassa 4.

Koska

$$\lim_{x \to 4+} f(x) = \lim_{x \to 4+} (-\frac{1}{2}x + 3)$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot 4 + 3 = 1 = f(4),$$

funktio f on myös oikeanpuoleisesti jatkuva kohdassa 4.
Funktio f on jatkuva kohdassa 4.

Funktio f on jatkuva välillä $[1, 4]$ ja $f(1) = 3$ ja $f(4) = 5$. Osoitetaan, että välillä $]1, 4[$ on ainakin yksi sellainen kohta a, että $f(a) = 2a$.

Tutkitaan funktiota $g(x) = f(x) - 2x$.

Koska funktio f on jatkuva välillä $[1, 4]$, myös funktio g on jatkuva välillä $[1, 4]$.

Koska funktion g arvot

$g(1) = f(1) - 2 \cdot 1 = 3 - 2 = 1$ ja
$g(4) = f(4) - 2 \cdot 4 = 5 - 8 = -3$

ovat erimerkkiset, funktiolla $g(x) = f(x) - 2x$ on Bolzanon lauseen nojalla välillä $]1, 4[$ ainakin yksi nollakohta a.

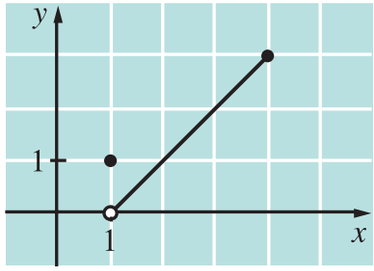
Koska $f(a) - 2a = 0$, niin $f(a) = 2a$.

Jos funktio f on jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$, niin se saa välillä $[a, b]$ sekä suurimman että pienimmän arvon.

On annettava esimerkki funktiosta $f: [1, 4] \to \mathbb{R}$, jolla on suurin arvo 3, mutta ei pienintä arvoa.

Koska jatkuva funktio saa suljetulla välillä sekä suurimman että pienimmän arvon, esimerkkifunktio ei voi olla jatkuva.

Muodostetaan esimerkkifunktio f laatimalla ensin yksinkertaisista osista muodostuva kuvaaja.



Muodostetaan esimerkkifunktion f lauseke.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{kun } x = 1 \\ x - 1, & \text{kun } 1 < x \leq 4 \end{cases}$$

Derivaatta

Funktio f on derivoituva kohdassa a, jos erotusosamäärällä

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

on raja-arvo kohdassa a. Raja-arvo on funktion derivaatta kohdassa a:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Määritetään funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ derivaatta kohdassa -1 erotusosamäärän raja-arvona.

$$\frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \frac{\frac{1}{x} + 1}{x + 1} = (\frac{1}{x} + 1) : (x + 1)$$

$$= \frac{1 + x}{x} \cdot \frac{1}{x + 1} = \frac{1}{x} \to -1, \text{ kun } x \to -1$$

Siis $f'(-1) = -1$.

Jos merkitään $x - a = h$, jolloin $x = a + h$, niin erotusosamäärä tulee muotoon

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Kun $x \to a$, niin $h \to 0$, joten käyttäen erotusosamäärän tätä muotoa saadaan

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Määritetään funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ derivaatta kohdassa -1 erotusosamäärän raja-arvona käyttämällä erotusosamäärän h-muotoa.

$$\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \frac{\frac{1}{-1+h}+1}{h}$$

$$= \left(\frac{1}{-1+h} + 1\right) : h = \frac{1+(-1+h)}{-1+h} \cdot \frac{1}{h}$$

$$= \frac{h}{-1+h} \cdot \frac{1}{h} = \frac{1}{-1+h} \to -1, \text{ kun } h \to 0$$

Siis $f'(-1) = -1$.

Jos funktio f on derivoituva kohdassa a, se on jatkuva kohdassa a.

Tutkitaan, onko funktio $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, \text{ kun } x \leq 1 \\ 2x + 1, \text{ kun } x > 1, \end{cases}$$

derivoituva kohdassa 1.

Koska $f(1) = 1^2 + 3 = 4$

ja

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} (2x + 1)$$

$$= 2 \cdot 1 + 1 = 3 \neq f(1),$$

funktio f on epäjatkuva kohdassa 1.

Funktio f ei ole derivoituva kohdassa 1.

Raja-arvo äärettömyydessä

Jos muuttujan arvojen suuretessa funktion f arvot lähestyvät lukua b, niin sanotaan, että funktiolla f on raja-arvo b, kun muuttujan arvot suurenevat rajatta.

Tällöin merkitään

$f(x) \to b$, kun $x \to \infty$,

tai

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b.$$

Vastaavasti, jos muuttujan arvojen pienetessä funktion f arvot lähestyvät lukua c, niin sanotaan, että funktiolla f on raja-arvo c, kun muuttujan arvot pienenevät rajatta.

Tällöin merkitään

$f(x) \to c$, kun $x \to -\infty$,

tai

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = c.$$

Tutkitaan funktion $f(x) = \dfrac{3 - 2e^x}{e^x}$ arvoja, kun muuttujan arvot suurenevat rajatta.

$$f(x) = \frac{3 - 2e^x}{e^x} = \frac{3}{e^x} - \frac{2e^x}{e^x} = 3e^{-x} - 2$$

$$\to 3 \cdot 0 - 2 = -2, \text{ kun } x \to \infty$$

Siis

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -2.$$

Tutkitaan funktion $\dfrac{5x - 7}{3x^2 + 1}$ raja-arvoja, kun muuttujan arvot suurenevat tai pienenevät rajatta.

$$\frac{5x - 7}{3x^2 + 1} = \frac{\dfrac{5x}{x^2} - \dfrac{7}{x^2}}{\dfrac{3x^2}{x^2} + \dfrac{1}{x^2}} = \frac{\dfrac{5}{x} - \dfrac{7}{x^2}}{3 + \dfrac{1}{x^2}}$$

$$\to \frac{0 - 0}{3 + 0} = 0, \text{ kun } x \to \infty \text{ tai } x \to -\infty$$

Siis

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{5x - 7}{3x^2 + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{5x - 7}{3x^2 + 1} = 0.$$

Käänteisfunktio

Jos funktio $f: A \to \mathbb{R}$ on aidosti kasvava tai aidosti vähenevä, f saa jokaisen arvonsa vain yhdessä kohdassa. Tällöin funktiolla f on käänteisfunktio $f^{-1}: B \to \mathbb{R}$, missä B on funktion f arvojoukko.

Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x} - 1$, derivaattafunktio $f'(x) = 2e^{2x}$ on positiivinen kaikilla muuttujan arvoilla. Funktio f on aidosti kasvava, joten funktiolla f on käänteisfunktio.

Koska $f(x) \to -1$, kun $x \to -\infty$, ja $f(x) \to \infty$, kun $x \to \infty$, funktion f arvojoukko on $]-1, \infty[$. Siis käänteisfunktion määrittelyjoukko on väli $]-1, \infty[$.

Käänteisfunktiolle f^{-1} on

$f^{-1}(y) = x$, jos ja vain jos $f(x) = y$.

Koska $f(1) = e^2 - 1$, niin $f^{-1}(e^2 - 1) = 1$.

Jos pystytään ratkaisemaan x yhtälöstä

$f(x) = y$,

käänteisfunktiolle saadaan lauseke

$x = f^{-1}(y)$.

Ratkaistaan x yhtälöstä $e^{2x} - 1 = y$.

$$e^{2x} - 1 = y$$

$$e^{2x} = y + 1$$

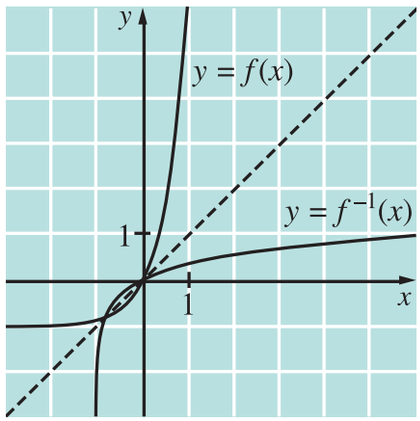
$$2x = \ln(y + 1)$$

$$x = \frac{1}{2}\ln(y + 1)$$

Siis $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}\ln(y + 1)$.

Käänteisfunktion $f^{-1}(x)$ kuvaaja on funktion f kuvaajan peilikuva suoran $y = x$ suhteen.

Kuviossa on funktioiden $f(x) = e^{2x} - 1$ ja $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln(x + 1)$ kuvaajat.



Käyttämällä hyväksi käänteisfunktion ominaisuutta

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

ja derivoimalla molemmat funktiot $f(f^{-1}(x))$ ja x saadaan

$$f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) = 1 \qquad | : f'(f^{-1}(x)) \neq 0$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Siis funktion f käänteisfunktio f^{-1} derivoidaan kaavalla

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))},$$

kun $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$.

Funktio $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x + 2x$, on aidosti kasvava, sillä

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 2 > 0 \text{ kaikilla } x > 0.$$

Siis funktiolla f on käänteisfunktio f^{-1}.

Määritetään käänteisfunktion derivaatta kohdassa 2.

Koska $f(1) = \ln 1 + 2 \cdot 1 = 2$, niin $f^{-1}(2) = 1$.

Siis

$$f'(f^{-1}(2)) = f'(1) = \frac{1}{1} + 2 = 3$$

ja

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(f^{-1}(2))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3}.$$

Integraalifunktio ja määrätty integraali

Funktio F on funktion f integraalifunktio, jos jokaisessa funktion f määrittelyjoukon pisteessä on $F'(x) = f(x)$. Voidaan osoittaa, että jokaisella jatkuvalla funktiolla on integraalifunktio.

Määritetään funktion

$$f(x) = \begin{cases} 3 & , \text{kun } x \leqslant -1 \\ 2x + 5 & , \text{kun } x > -1 \end{cases}$$

kaikki integraalifunktiot.

Funktio f on vasemmanpuoleisesti jatkuva kohdassa -1 ja $f(-1) = 3$. Koska

$$\lim_{x \to -1+} f(x) = \lim_{x \to -1+} (2x + 5)$$

$$= 2 \cdot (-1) + 5 = 3,$$

funktio f on myös oikeanpuoleisesti jatkuva kohdassa -1.

Funktio f on jatkuva kohdassa -1, joten funktiolla f on integraalifunktio.

Funktion f kaikki integraalifunktiot ovat muotoa

$$F(x) = \begin{cases} 3x + C & , \text{kun } x \leqslant -1 \\ x^2 + 5x + D & , \text{kun } x > -1, \end{cases}$$

missä C ja D ovat vakioita.

Koska integraalifunktio on derivoituva, se on jatkuva.

Integraalifunktio F on jatkuva kohdassa -1. Toispuolisista raja-arvoista kohdassa -1 saadaan yhtälö

$$(-1)^2 + 5 \cdot (-1) + D = 3 \cdot (-1) + C$$

$$-4 + D = -3 + C$$

$$D = 1 + C.$$

Siis funktion f integraalifunktiot ovat

$$F(x) = \begin{cases} 3x + C & , \text{kun } x \leqslant -1 \\ x^2 + 5x + 1 + C & , \text{kun } x > -1. \end{cases}$$

Muuttujan x funktiossa $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ muuttujana on määrätyn integraalin yläraja. Kun funktio $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ derivoidaan, derivaattafunktio on f:

$$\mathrm{D}_x \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x).$$

Funktio $g(x) = \int_2^x \frac{t}{\ln t}\,\mathrm{d}t$ on määritelty, kun $x > 1$.

Funktion g derivaattafunktio on

$$g'(x) = \mathrm{D}_x \int_2^x \frac{t}{\ln t}\,\mathrm{d}t = \frac{x}{\ln x}.$$

Epäoleellinen integraali

Määrätyn integraalin raja-arvoa, kun integraalin yläraja tai alaraja kasvaa rajatta, pienenee rajatta tai lähenee toispuolisesti sellaista kohtaa, jossa funktio ei ole määritelty, kutsutaan epäoleelliseksi integraaliksi.

Jos raja-arvo on olemassa, sanotaan, että epäoleellinen integraali suppenee.
Jos raja-arvoa ei ole, sanotaan, että integraali hajaantuu.

Määritetään epäoleelliset integraalit

$$\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x \text{ ja } \int_{1}^{2} \frac{1}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x.$$

$$\int_{s}^{1} \frac{1}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{s}^{1} (x-2)^{-2}\,\mathrm{d}x = \Big/_{s}^{1} -(x-2)^{-1}$$

$$= \Big/_{s}^{1} -\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{1-2} + \frac{1}{s-2}$$

$$= 1 + \frac{1}{s-2} \to 1 + 0 = 1, \text{ kun } s \to -\infty$$

Siis $\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x = 1.$

$$\int_{1}^{t} \frac{1}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x = \Big/_{1}^{t} -\frac{1}{x-2}$$

$$= -\frac{1}{t-2} - (-\frac{1}{1-2}) = -\frac{1}{t-2} - 1$$

Raja-arvoa $\lim\limits_{x \to 2-} (-\frac{1}{t-2})$ ei ole olemassa, joten epäoleellinen integraali $\int_{1}^{2} \frac{1}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x$ hajaantuu.

Integraali, joka on epäoleellinen sekä ala- että ylärajalla, määritetään kahden epäoleellisen integraalin summana.

Epäoleellinen integraali $\int_{-\infty}^{2} \frac{1}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x$ on summa

$$\int_{-\infty}^{2} \frac{1}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^{1} \frac{1}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} \frac{1}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x,$$

edellyttäen, että molemmat yhteenlasketut integraalit suppenevat.

Koska $\int_{1}^{2} \frac{1}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x$ hajaantuu,

$\int_{-\infty}^{2} \frac{1}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x$ hajaantuu.

Jatkuvat todennäköisyysjakaumat

Jatkuvan satunnaismuuttujan jakauman määrää jakauman tiheysfunktio.

Funktio $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jonkin satunnaismuuttujan X tiheysfunktio, jos

$f(x) \geqslant 0$ kaikilla x

ja

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Jälkimmäinen ehto tarkoittaa, että funktion f kuvaajan ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-ala on 1.

Todennäköisyys, että satunnaismuuttujan X arvo on jollain välillä, on tiheysfunktion kuvaajan ja x-akselin tällä välillä rajaaman alueen pinta-ala.

Esimerkiksi

$$\mathrm{P}(a \leqslant X \leqslant b) = \int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Funktiolle $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-2)^2}, & \text{kun } x \leqslant 1 \\ 0, & \text{kun } x > 1, \end{cases}$$

pätee $f(x) \geqslant 0$ kaikilla x.

Funktion f kuvaajan ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-ala on $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x$.

Edellä laskettiin, että $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x = 1$.

Siis funktio f on jonkin satunnaismuuttujan X tiheysfunktio.

Satunnaismuuttujalle X on

$$\mathrm{P}(0 \leqslant X \leqslant 1) = \int_{0}^{1} \frac{1}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \Big/_{0}^{1} -\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{1-2} + \frac{1}{0-2}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Funktio

$$F(x) = \mathrm{P}(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

on satunnaismuuttujan X kertymäfunktio. Kertymäfunktion arvo $F(x)$ ilmaisee, millä todennäköisyydellä satunnaismuuttujan X arvo on pienempi tai yhtä suuri kuin x.

Kaikki satunnaismuuttujan X todennäköisyydet voidaan laskea kertymäfunktion avulla.

Esimerkiksi

$\mathrm{P}(X \geqslant a) = 1 - \mathrm{P}(X \leqslant a) = 1 - F(a)$

ja

$\mathrm{P}(a \leqslant X \leqslant b) = F(b) - F(a)$.

Määritetään edellisen satunnaismuuttujan X kertymäfunktio.

Kun $x \leqslant 1$, niin

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{(t-2)^2}\,\mathrm{d}t = \lim_{s \to -\infty} \Big/_{s}^{x} -\frac{1}{t-2}$$

$$= \lim_{s \to -\infty} \left(-\frac{1}{x-2} + \frac{1}{s-2}\right) = -\frac{1}{x-2} + 0$$

$$= -\frac{1}{x-2}.$$

Kun $x > 1$, niin

$$F(x) = \int_{-\infty}^{1} \frac{1}{(t-2)^2}\,\mathrm{d}t + \int_{1}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 1 + 0 = 1.$$

Siis satunnaismuuttujan X kertymäfunktio on

$$F(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x-2}, & \text{kun } x \leqslant 1 \\ 1, & \text{kun } x > 1. \end{cases}$$

$$\mathrm{P}(X \geqslant -1) = 1 - F(-1) = 1 - \left(-\frac{1}{-1-2}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Kun kertymäfunktio $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ derivoidaan ylärajan x suhteen, derivaattafunktio on tiheysfunktio $f(x)$.
Siis

$$F'(x) = f(x)$$

jokaisessa kohdassa, jossa kertymäfunktio on derivoituva.

Olkoon satunnaismuuttuja X väliltä $[0, 10]$ arvottu satunnaisluku. Muodostetaan X:n kertymäfunktio $F(x)$.

Kun $x < 0$, niin $F(x) = \mathrm{P}(X \leqslant x) = 0$.

Kun $0 \leqslant x \leqslant 10$, todennäköisyys $\mathrm{P}(X \leqslant x)$ on välin $[0, x]$ pituuden x suhde välin $[0, 10]$ pituuteen 10.

Siis kun $0 \leqslant x \leqslant 10$, $F(x) = \frac{x}{10}$.

Kun $x > 10$, niin $F(x) = \mathrm{P}(X \leqslant x) = 1$.

Siis

$$F(x) = \begin{cases} 0\text{ , kun } x < 0 \\ \frac{x}{10}\text{ , kun } 0 \leqslant x \leqslant 10 \\ 1\text{ , kun } x > 10. \end{cases}$$

Satunnaismuuttujan X tiheysfunktio on

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0\text{ , kun } x < 0 \\ \frac{1}{10}\text{ , kun } 0 < x < 10 \\ 0\text{ , kun } x > 10. \end{cases}$$

Kertymäfunktio F ei ole derivoituva kohdissa 0 ja 10. Määritellään lisäksi, että

$f(0) = f(10) = \frac{1}{10}$, jolloin

$$f(x) = \begin{cases} 0\text{ , kun } x < 0 \\ \frac{1}{10}\text{ , kun } 0 \leqslant x \leqslant 10 \\ 0\text{ , kun } x > 10. \end{cases}$$

Satunnaismuuttujan X tiheysfunktio on välillä $[0, 10]$ vakiofunktio $\frac{1}{10}$ ja muualla 0.
Kyseessä on niin sanottu tasainen jakauma.

Satunnaismuuttujan X odotusarvo on

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x,$$

jos integraali suppenee.

Satunnaismuuttujan X keskihajonta $\mathrm{D}(X)$ on varianssin

$$\mathrm{D}^2(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,\mathrm{d}x,$$

missä $\mu = \mathrm{E}(X)$, neliöjuuri:

$$\mathrm{D}(X) = \sqrt{\mathrm{D}^2(X)}\,.$$

Satunnaismuuttujan $X =$ ”väliltä [0, 10] arvottu satunnaisluku” odotusarvo on

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^{10} x \cdot \frac{1}{10}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{10}\Big/_0^{10} \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{20}\Big/_0^{10} x^2$$

$$= \frac{1}{20}(100 - 0) = 5,$$

varianssi on

$$\mathrm{D}^2(X) = \int_0^{10} (x-5)^2\,\frac{1}{10}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{10}\Big/_0^{10} \frac{1}{3}(x-5)^3$$

$$= \frac{1}{30}\Big/_0^{10} (x-5)^3 = \frac{1}{30}(125 - (-125))$$

$$= \frac{250}{30} = \frac{25}{3}$$

ja keskihajonta on

$$\mathrm{D}(X) = \sqrt{\frac{25}{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}} \approx 2{,}89.$$

Lukujonon raja-arvo

Lukujonolla (a_n) on raja-arvo a, jos n:n kasvaessa lukujonon jäsenet lähestyvät lukua a.

Tällöin merkitään

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a$$

tai

$a_n \to a$, kun $n \to \infty$.

Jos lukujonolla on raja-arvo, sanotaan, että lukujono suppenee. Jos lukujonolla ei ole raja-arvoa, jono hajaantuu.

Jonon $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ jäsenet lähenevät nollaa, kun n kasvaa, eli

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

eli

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0, \text{ kun } n \to \infty.$$

Jono $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ suppenee.

Jonon $a_n = 1 + (-1)^{n+1} \cdot 3$ jäsenet ovat vuorotellen 4 ja -2. Jono hajaantuu.

Usein voidaan käyttää hyväksi geometrista jonoa (q^n) ja jonoja $\left(\frac{1}{n^p}\right)$, missä p on positiivinen kokonaisluku.

Jos $-1 < q < 1$, niin geometrinen jono (q^n) suppenee kohti raja-arvoa 0.

$\lim\limits_{n \to \infty} (-0{,}99)^n = 0$

$$\frac{3^n - 4 \cdot 5^n}{6 \cdot 5^n} = \frac{1}{6} \cdot \frac{3^n}{5^n} - \frac{4}{6} = \frac{1}{6}\left(\frac{3}{5}\right)^n - \frac{2}{3}$$

$$\to \frac{1}{6} \cdot 0 - \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}, \text{ kun } n \to \infty$$

Jos $q = 1$, niin geometrinen jono (q^n) on vakiojono ja suppenee kohti raja-arvoa 1.

Jos $q \leqslant -1$ tai $q > 1$, niin geometrinen jono (q^n) hajaantuu.

Jono (a_n), jossa $a_n = \frac{3^{2n}}{8^n}$, hajaantuu, sillä

$$\frac{3^{2n}}{8^n} = \frac{(3^2)^n}{8^n} = \left(\frac{9}{8}\right)^n \text{ ja } \frac{9}{8} > 1.$$

Jos p on positiivinen kokonaisluku, niin

$\frac{1}{n^p} \to 0$, kun $n \to \infty$.

Määritetään jonon $a_n = \frac{2n - 6n^2}{4n^2 + 3}$ raja-arvo.

$$a_n = \frac{2n - 6n^2}{4n^2 + 3} = \frac{\frac{2n}{n^2} - \frac{6n^2}{n^2}}{\frac{4n^2}{n^2} + \frac{3}{n^2}}$$

$$= \frac{\frac{2}{n} - 6}{4 + \frac{3}{n^2}} \to \frac{0 - 6}{4 + 0} = -\frac{3}{2}, \text{ kun } n \to \infty$$

Sarja

Sarjan

$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$

summa on osasummien jonon (S_n) raja-arvo. S_n on sarjan n:n ensimmäisen termin summa.

$S_1 = a_1$
$S_2 = a_1 + a_2$
$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$
jne.

Jos jono (S_n) suppenee kohti raja-arvoa S, niin sanotaan, että sarja

$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$

suppenee ja sarjan summa on S. Merkitään

$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = S$

tai

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S.$$

Jos lukujono (S_n) hajaantuu, niin sanotaan, että sarja

$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$

hajaantuu.

Sarjan

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \ldots$$

osasummien jono alkaa:

$S_1 = 1$

$S_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$S_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

$S_4 = \frac{3}{4}$

$S_5 = 1.$

Yleisesti on $S_n = 1$, kun n on pariton, ja

$S_n = \frac{n-1}{n}$, kun n on parillinen. Koska myös

$\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} \to 1$, kun $n \to \infty$, niin sarja

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \ldots$$

suppenee ja sarjan summa on 1.

Sarjan

$$\frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{\text{2 kpl}} + \underbrace{\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}}_{\text{3 kpl}} + \ldots$$

jokainen lohko kasvattaa aina osasummaa $\frac{1}{2}$:lla. Sarja hajaantuu.

Suppenevan sarjan termien raja-arvo on 0, eli jos sarja

$a_1 + a_2 + a_3 + ...$

suppenee, niin $\lim\limits_{k \to \infty} a_k = 0$.

Siten, jos $\lim\limits_{k \to \infty} a_k \neq 0$ tai jos jono (a_k) ei suppene, niin sarja $a_1 + a_2 + a_3 + ...$ hajaantuu.

Sarja

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + ... = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2k+1}$$

hajaantuu, sillä

$$\lim_{k \to \infty} \frac{k}{2k+1} = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{k}} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Geometrinen sarja

Geometrinen sarja

$a + aq + aq^2 + ...$

suppenee, jos ja vain jos $-1 < q < 1$ eli $|q| < 1$. Tällöin on

$$a + aq + aq^2 + ... = \frac{a}{1-q}.$$

Sarjan summan kaavassa $\frac{a}{1-q}$ luku a on sarjan ensimmäinen termi ja luku q peräkkäisten termien suhdeluku.

Sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} 4 \cdot (-1)^{k+1} \left(\frac{3}{5}\right)^k$$

$$= 4 \cdot \frac{3}{5} - 4 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 - ...$$

suppenee, sillä peräkkäisten termien suhdeluku $q = -\frac{3}{5}$ toteuttaa epäyhtälön $-1 < q < 1$.

Sarjan summa on

$$\frac{4 \cdot \frac{3}{5}}{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)} = \frac{4 \cdot \frac{3}{5}}{\frac{8}{5}} = 4 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{8} = \frac{3}{2}.$$

Tutkitaan, millä muuttujan x arvoilla sarja

$$1 + \frac{3}{x+2} + \left(\frac{3}{x+2}\right)^2 + \ldots$$

suppenee.
Sarja on määritelty, kun $x \neq -2$.
Sarja suppenee, kun

$$\left|\frac{3}{x+2}\right| < 1$$

$$\frac{3}{|x+2|} < 1 \qquad | \cdot |x+2| > 0$$

$$3 < |x+2|.$$

Luvun itseisarvo on suurempi kuin 3, kun luku on pienempi kuin -3 tai suurempi kuin 3.

$$|x+2| > 3$$

$$x+2 < -3 \text{ tai } x+2 > 3$$

$$x < -5 \text{ tai } x > 1$$

Siis sarja suppenee, kun $x < -5$ tai $x > 1$.

Sarjan summa on tällöin

$$\frac{1}{1-\frac{3}{x+2}} = \frac{1}{\frac{x+2-3}{x+2}} = \frac{1}{\frac{x-1}{x+2}} = 1 \cdot \frac{x+2}{x-1}$$

$$= \frac{x+2}{x-1}.$$

KERTAUSTEHTÄVIÄ

Tehtävät ovat kertausluvun otsikoiden mukaan järjestettyjä perustehtäviä.

RAJA-ARVO

312. Määritä.

a) $\lim\limits_{x \to 25} \dfrac{\sqrt{x} - 5}{x - 25}$ b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt{x + 10} - 3}{x + 1}$

313. Määritä sellainen vakion a arvo, että funktiolla $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{ax^2 + 3}{x + 1}$, on raja-arvo kohdassa -1. Mikä raja-arvo tällöin on?

314. Määritä $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{|x - 3| - |x + 1|}{|x| - 1}$.

315. Määritä funktion vasemman- ja oikeanpuoleinen raja-arvo kohdassa 2. Onko funktiolla raja-arvo kohdassa 2? Jos raja-arvo on olemassa, niin mikä se on?

a) $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, \text{ kun } x \leqslant 2 \\ x + 3, \text{ kun } x > 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^3 - 5, \text{ kun } x < 2 \\ 2x - 1, \text{ kun } x > 2 \end{cases}$

316. Määritä sellaiset vakioiden a ja c arvot, että funktiolla

$$f(x) = \begin{cases} -2x + c, \text{ kun } x < 3 \\ ax - 2, \text{ kun } x > 3 \end{cases}$$

on kohdassa 3 raja-arvo -1. Piirrä kuvaaja.

FUNKTION JATKUVUUS

317. a) Onko funktiolla $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5 + \dfrac{1}{x}$, epäjatkuvuuskohtia?

b) On määritelty $f(x) = 5 + \dfrac{1}{x}$, kun $x \neq 0$. Voidaanko määritellä $f(0)$ niin, että saadaan kaikkialla jatkuva funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

318. Onko funktio f jatkuva kohdassa -1? Perustele. Piirrä funktion f kuvaaja.

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1, \text{ kun } x < -1 \\ 2 - x^2, \text{ kun } x \geqslant -1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2, \text{ kun } x \neq -1 \\ 2, \text{ kun } x = -1 \end{cases}$

319. Määritä vakiot a ja b niin, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} a, \text{ kun } x < -2 \\ ax^2 + b, \text{ kun } -2 \leqslant x \leqslant 1 \\ bx - 1, \text{ kun } x > 1 \end{cases}$$

on kaikkialla jatkuva.

320. On määritelty $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{6x - 18}$, kun $x \neq 3$. Määrittele funktion arvo $f(3)$ niin, että funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on kaikkialla jatkuva.

321. Anna esimerkki aidosti kasvavasta funktiosta $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joka on epäjatkuva kohdassa 3 ja jatkuva kaikkialla muualla ja jonka arvo kohdassa 2 on 1. Piirrä funktion kuvaaja.

322. Funktio $f\colon [1, 2] \to \mathbb{R}$ on jatkuva, ja funktion f pienin arvo on 1 ja suurin arvo 8. Osoita, että välillä $]1, 2[$ on ainakin yksi sellainen kohta, että $\ln f(a) = a$.

323. Anna esimerkki funktiosta $f\colon [0, 6] \to \mathbb{R}$, jonka arvojoukko on väli $]-3, 3[$. Piirrä kuvaaja.

DERIVAATTA

324. Määritä funktion $f(x) = \dfrac{1}{x}$ derivaatta pisteessä $x = 2$ laskemalla erotusosamäärän raja-arvo. (Ylioppilaskoe, s. 2004)

325. Tutki, onko funktio f derivoituva kohdassa -1, kun

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + 1, & \text{kun } x < -1 \\ -x, & \text{kun } x \geqslant -1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + 1, & \text{kun } x < -1 \\ -x + \frac{1}{2}, & \text{kun } x \geqslant -1. \end{cases}$

326. Anna esimerkki vähenevästä funktiosta $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joka on jatkuva kaikkialla ja derivoituva kaikkialla muualla paitsi kohdassa 2. Perustele. Piirrä kuvaaja.

327. Derivoituvalla funktiolla $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on ominaisuus: $f'(x) = 2xf(x)$ kaikilla x. Osoita, että funktio $f(x)e^{-x^2}$ on vakiofunktio, ja määritä kaikki funktiot, joilla on tämä ominaisuus.

RAJA-ARVO ÄÄRETTÖMYYDESSÄ

328. Määritä.

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^{2x} - 3e^x}{e^{2x}}$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{2x} - 3e^x}{e^{2x}}$

329. Määritä funktion raja-arvo, kun muuttujan arvot suurenevat ja pienenevät rajatta.

a) $f(t) = \dfrac{7}{4t + 1}$ b) $g(x) = \dfrac{3x - 1}{5x + 2}$

c) $h(x) = \dfrac{x^2 - x + 3}{x - 7}$

330. Määritä $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$, kun

$f(x) = \ln(3e^{2x} + e^x) - 2x$.

331. Määritä funktion $f(x) = \dfrac{6x^2}{x^2 + x + 1}$ suurin ja pienin arvo.

KÄÄNTEISFUNKTIO

332. Osoita, että funktiolla

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\frac{1}{2}x} - 3$, on käänteisfunktio. Mikä käänteisfunktion määrittelyjoukko on? Muodosta käänteisfunktion f^{-1} lauseke, ja piirrä funktioiden $f(x)$ ja $f^{-1}(x)$ kuvaajat. Osoita laskemalla, että $f(f^{-1}(x)) = x$ funktion f^{-1} koko määrittelyjoukossa.

333. Osoita, että funktiolla

$f\colon [0, \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$, on käänteisfunktio. Määritä käänteisfunktion f^{-1} derivaatat $(f^{-1})'(2)$ ja $(f^{-1})'(18)$.

INTEGRAALIFUNKTIO JA MÄÄRÄTTY INTEGRAALI

334. Määritä funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-2x} & , \text{kun } x < 0 \\ 2x + 1 & , \text{kun } x \geqslant 0 \end{cases}$$

a) kaikki integraalifunktiot
b) integraalifunktio F, jonka kuvaaja kulkee pisteen $(1, 2)$ kautta.

335. Funktio F on funktion $f(x) = |1 - x| - x$ integraalifunktio ja $F(2) = 0$. Mikä funktion F arvo $F(-2)$ on?

336. Derivoi funktio.

a) $u(x) = \int_3^x (t^2 + 1)^3 \, dt$

b) $v(x) = \int_x^3 (t^2 + 1)^3 \, dt$

c) $w(x) = \int_3^{5x^2} (t^2 + 1)^3 \, dt$

337. Määritä funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \int_1^x (t - 3t^2) e^{-t^2} \, dt,$$

derivaattafunktion nollakohdat.

EPÄOLEELLINEN INTEGRAALI

338. Määritä.

a) $\int_1^\infty \frac{1}{x^4} \, dx$ b) $\int_0^\infty \cos x \, dx$

339. Määritä.

a) $\int_{-\infty}^{-1} e^{4x} \, dx$ b) $\int_{-1}^\infty e^{4x} \, dx$ c) $\int_{-\infty}^\infty e^{4x} \, dx$

340. Laske $\int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{1}{\sqrt{4x - 1}} \, dx$.

JATKUVAT TODENNÄKÖISYYSJAKAUMAT

341. Määritä vakio a niin, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{kun } x < 0 \\ ae^{-0{,}02x} & , \text{kun } x \geqslant 0 \end{cases}$$

on erään satunnaismuuttujan X tiheysfunktio. Laske todennäköisyys $\mathrm{P}(10 \leqslant X \leqslant 50)$.

342. a) Osoita, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{kun } x < 0 \\ 3x^2 & , \text{kun } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & , \text{kun } x > 1 \end{cases}$$

on erään satunnaismuuttujan X tiheysfunktio.
b) Määritä satunnaismuuttujan X kertymäfunktio. Laske kertymäfunktion avulla $\mathrm{P}(X > 0{,}67)$.
c) Määritä satunnaismuuttujan X odotusarvo ja keskihajonta.

343. Heinäkasa on muodoltaan pohjallaan seisova kartio. Kasan korkeus on 3 metriä. Olkoon satunnaismuuttuja X heinäkasassa olevan pienen neulan pystysuora etäisyys kasan huipusta. Määritä satunnaismuuttujan X

a) kertymäfunktio
b) tiheysfunktio
c) odotusarvo.

LUKUJONON RAJA-ARVO

344. Suppeneeko vai hajaantuuko lukujono (a_n)? Jos jono suppenee, niin mikä sen raja-arvo on?

a) $a_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n$

b) $a_n = \left(-\frac{3}{2}\right)^n$

c) $a_n = (-1)^n \frac{2n}{3n+1}$

d) $a_n = (-1)^n \frac{2n}{3n^2+1}$

345. Määritä.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{15 \cdot 3^n - 6 \cdot 4^n}{3 \cdot 4^n}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 6n + 12}{12n^2}$

346. Määritä.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2 + 4n}{12n^2 - 1}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n - \frac{n^2 - 2n}{n+3}\right)$

347. Määritä.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(6n-1)^3}{(4n+2)^3}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-3}{\sqrt{6n^2+4}}$

348. Määritä $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cos(n^2+1)}{n^2}$.

349. Määritä jonon $a_n = \frac{2n}{3n+1}$ raja-arvo. Mistä n:n arvosta lähtien jonon jäsenten etäisyys raja-arvosta on pienempi kuin 10^{-5}?

350. Lukujonossa (a_n) on $a_n = 2n - \sqrt{4n^2+n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.
Määritä $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

SARJA

351. Suppeneeko vai hajaantuuko sarja? Jos sarja suppenee, niin mikä sen summa on?
a)

$$1 \underbrace{- \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}_{2 \text{ kpl}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}}_{3 \text{ kpl}} \underbrace{- \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}}_{4 \text{ kpl}} + \ldots$$

b) $1 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{5} + \ldots$

352. Määritä sarjan n. osasumma. Suppeneeko vai hajaantuuko sarja? Jos sarja suppenee, niin mikä sen summa on?

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1}\right)$

b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2k-1}} - \frac{1}{\sqrt{2k+1}}\right)$

353. Sarjan $\frac{1}{101} + \frac{2}{201} + \frac{3}{301} + \ldots$ termien osoittajat kasvavat aina yhdellä ja nimittäjät sadalla. Suppeneeko vai hajaantuuko sarja?

GEOMETRINEN SARJA

354. Laske sarjan summa.

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^k$ b) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \left(\frac{2}{5}\right)^k$

355. Olkoon a_3 lukusuoran pisteitä $a_1 = -3$ ja $a_2 = 5$ yhdistävän janan a_1a_2 keskipiste, a_4 janan a_2a_3 keskipiste, a_5 janan a_3a_4 keskipiste jne. Mitä pistettä lukusuoran pisteiden jono $a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots$ lähenee?

356. Kolme pelaajaa heittää vuorollaan rahaa niin, että joka kierroksella heittojärjestys on sama. Voittaja on se, joka heittää ensimmäisen klaavan. Millä todennäköisyydellä pelin voittaa a) aloittaja b) toisena heittävä c) kolmantena heittävä?

357. Millä muuttujan x arvoilla sarja

$$1 - \frac{3}{x+5} + \left(\frac{3}{x+5}\right)^2 - \left(\frac{3}{x+5}\right)^3 + \ldots$$

suppenee? Määritä summafunktio $S(x)$.

358. Millä muuttujan x arvoilla geometrisen sarjan $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^5} + \ldots$ summa on $\frac{2}{3}$?

359. Erään suppenevan geometrisen sarjan summa on 12. Jos poistetaan joka toinen sarjan termi alkaen toisesta termistä, jäljelle jää sarja, jonka summa on 9. Määritä alkuperäinen sarja.

TEHTÄVÄSARJOJA

SARJA A

1. Määritä funktion $f(x) = |x - 2| - |x + 1|$ integraalifunktio F, jonka kuvaaja kulkee pisteen $(0, 1)$ kautta. Piirrä funktioiden f ja F kuvaajat.

2. Määritä funktion $f(x) = \frac{1}{x^2}$ derivaatta pisteessä $x = 3$ laskemalla erotusosamäärän raja-arvo.

3. Määritä $\int_0^{\infty} (1 - \frac{e^x}{e^x + 1})\mathrm{d}x$.

4. Määritellään $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kaavalla $f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1 + nx}{1 + nx^2}$. Piirrä funktion f kuvaaja.

(Ylioppilaskoe, k. 1989)

5. Suorat $x = a$ ja $x = 2a$, missä $0 < a \leqslant \frac{\pi}{2}$, erottavat viipaleen käyrän $y = \frac{\sin x}{x}$ ja x-akselin väliin jäävästä alueesta. Millä a:n arvolla viipaleen pinta-ala on suurin?

6. Satunnaismuuttuja Z on väliltä $]0, 1[$ arvottujen satunnaislukujen x ja y osamäärä $\frac{y}{x}$.

Laske $\mathrm{P}(Z < 2)$ ja määritä edelleen satunnaismuuttujan Z

a) kertymäfunktio
b) tiheysfunktio
c) odotusarvo.

SARJA B

1. Määritä sellainen vakion a arvo, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + a & , \text{kun } x < 1 \\ x^2 - x - 2, & \text{kun } x \geqslant 1 \end{cases}$$

on kaikkialla jatkuva. Ratkaise edelleen näin saadun jatkuvan funktion nollakohdat.

2. Muodosta funktion

$S(x) = (1 - x)x + (1 - x)x^2 + (1 - x)x^3 + \ldots$

lauseke ja piirrä funktion $S(x)$ kuvaaja.

3. Määritä raja-arvo

$$\lim_{n \to \infty} \int_1^n \left(\frac{1}{x^2} + \cos nx\right)\mathrm{d}x.$$

(Ylioppilaskoe, k. 2002)

4. Osoita, että funktiolla

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$, on käänteisfunktio. Mikä käänteisfunktion f^{-1} määrittelyjoukko on? Määritä käänteisfunktion nollakohta x_0 ja derivaatta $(f^{-1})'(x_0)$.

5. Osoita, että jostain n:n arvosta lähtien on $\frac{n + 5}{3n} < \frac{2}{3}$, ja määritä lukujonon

$a_n = \left(\frac{n + 5}{3n}\right)^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, raja-arvo.

Määritä edelleen $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n + 1}{2n}\right)^n$.

6. Funktio f on derivoituva eräällä nollan sisältävällä välillä, ja derivaattafunktio f' on jatkuva kohdassa 0. Määritä funktion $g(x) = x^2 f(x)$ toinen derivaatta $g''(0)$. Voidaanko tulosta soveltaa funktioon $f(x) = x|x| + 3$?

SARJA C

1. Määritä vakiot a ja b niin, että funktiolla $f(x) = \dfrac{ax^2+1}{2x-1} + bx^2$ on kohdassa $\dfrac{1}{2}$ raja-arvo 1.

2. Määritä $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1})$.

3. Millä x:n arvoilla sarja $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (1-2\cos x)^n$ suppenee, ja mikä on tällöin sen summa?
(Ylioppilaskoe, k. 1983)

4. Puolipallon muotoisen padan korkeus on 20 cm. Pata on reunojaan myöten täynnä riisipuuroa. Olkoon satunnaismuuttuja X padassa olevan mantelin pystysuora etäisyys padan pohjasta senttimetreinä. Laske $\mathrm{P}(X \leqslant 10)$ ja määritä edelleen satunnaismuuttujan X a) kertymäfunktio b) tiheysfunktio c) odotusarvo.

5. Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jakso on 2, toisin sanoen $f(x+2) = f(x)$ kaikilla reaaliluvuilla x. Lisäksi on

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, \text{ kun } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 1-x, \text{ kun } 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Piirrä funktion f kuvaaja. Missä pisteissä funktio f ei ole derivoituva? Piirrä funktioiden g ja h kuvaajat, kun $g(x) = f(x+1)$ ja $h(x) = f(x) + f(x+1)$. Missä pisteissä nämä eivät ole derivoituvia? (Ylioppilaskoe, s. 2004)

6. Funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ toteuttaa epäyhtälön (1) $f(x) - f(y) \geqslant x - y$ kaikilla arvopareilla (x, y), joissa $x > y$. Osoita, että f on kasvava. Osoita edelleen: Jos f on derivoituva, $f'(x) \geqslant 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Muodosta esimerkki funktiosta, joka täyttää ehdon (1) ja on epäjatkuva $\mathbb{R}$:ssä.
(Ylioppilaskoe, k. 1996)

SARJA D

1. Pallo pudotetaan 2,0 metrin korkeudesta. Jokaisen pompun korkeus on 70 % edellisen pompun korkeudesta. Laske sopivan sarjan avulla arvio matkalle, jonka pallo kulkee pystysuorassa suunnassa ennen pysähtymistään.

2. Määritä $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{9x^2+5x} - 3x)$.

3. Määritä päättymättömän lukujonon

$$\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{7}{4}, \frac{10}{5}, \frac{13}{6}, \ldots$$

n:s jäsen ja lukujonon raja-arvo. Mistä luvun n arvosta alkaen jonon jäsenen poikkeama tästä raja-arvosta on itseisarvoltaan pienempi kuin 0,001? (Ylioppilaskoe, s. 2005)

4. Määritä funktion
$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^{3x} - 6e^{2x} + 9e^x$,
suurin ja pienin arvo.

5. Kun $a \in [0, 2]$, niin merkitään $f(a)$:lla funktion $g(x) = x^2 - 2ax$ pienintä arvoa välillä $[1, 4]$. Määritä funktio f ja piirrä sen kuvaaja. Määritä derivaatta $f'(\frac{3}{2})$. Onko f:llä derivaatta välin $]0, 2[$ jokaisessa pisteessä?
(Ylioppilaskoe, k. 1995)

6. Funktio f määritellään välillä $-\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{1}{2}$ siten, että

$f(x) = \dfrac{1}{x}(1 - \sqrt{1-4x^2})$, kun $x \neq 0$, ja $f(0) = 0$.

Määritä $f'(x)$. Millä muuttujan x arvoilla on $-1 < f(x) < 1$? (Ylioppilaskoe, k. 1980)

SARJA E

1. Määritä funktion a) $\sin|x|$ b) $\cos|x|$ kaikki integraalifunktiot $F(x)$.

2. Anna esimerkki sellaisesta suppenevasta lukujonosta $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots$, että vastaava sarja $\sum_{x=1}^{\infty} x_n$ hajaantuu. Voiko lukujono hajaantua ja vastaava sarja supeta? (Ylioppilaskoe, k. 2004)

3. Määritä $\int_0^{\infty} \left(\frac{2}{x+3} - \frac{6}{3x+1}\right)\mathrm{d}x$.

4. Osoita, että funktiolla $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x} + x - 4$, on käänteisfunktio. Missä pisteessä käyrät $y = f(x)$ ja $y = f^{-1}(x)$ leikkaavat toisensa? Mikä on käyrälle $y = f^{-1}(x)$ tähän pisteeseen piirretyn tangentin kulmakerroin?

5. Funktiolle $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pätee $f(x) - f(y) \leqslant (x-y)^2$ kaikilla muuttujan arvoilla x ja y. Osoita, että kaikilla muuttujan arvoilla on $|f(x) - f(y)| \leqslant (x-y)^2$, ja todista tämän epäyhtälön avulla, että funktio f on vakiofunktio.

6. Funktiolla $f:]0, \infty[\to \mathbb{R}$ on ominaisuus: $f(ab) = f(a) + f(b)$ kaikilla a ja b.

a) Määritä $f(1)$.

b) Osoita, että jos funktio f on jatkuva kohdassa 1, niin se on jatkuva kaikkialla.

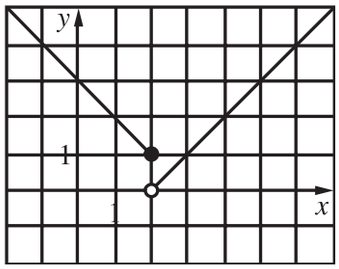
c) Osoita, että jos funktio f on derivoituva kohdassa 1, niin se on derivoituva kaikkialla ja $f'(x) = \frac{f'(1)}{x}$.

d) Anna esimerkki funktiosta, jolla on ominaisuus $f(ab) = f(a) + f(b)$.

Vastaukset

Paloittain määritelty funktio

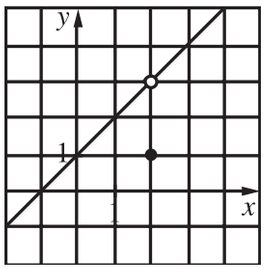
1. $f(0) = 3,\ f(2) = 1,\ f(3) = 1$



2. a) $f(-1) = 2,\ f(2) = -1,\ f(3) = 3$

b) $f(x) = \begin{cases} -x + 1, \text{ kun } x \leqslant 2 \\ x \quad\quad , \text{ kun } x > 2 \end{cases}$

3.



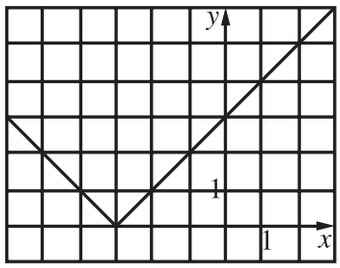
4. $f(x) = \begin{cases} x + 1, \text{ kun } 0 \leqslant x < 2 \\ 5 \quad\quad , \text{ kun } x = 2 \\ 2 \quad\quad , \text{ kun } 2 < x \leqslant 5 \end{cases}$

5. $-\sqrt{3}$ ja $\frac{1}{3}$

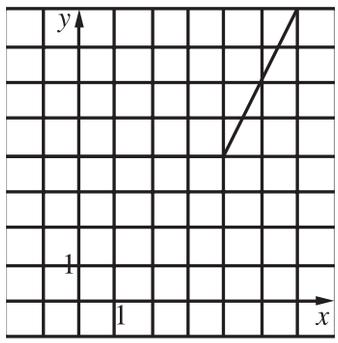
6. $f(x) = \begin{cases} 2x + 25, \text{ kun } 0 < x \leqslant 30 \\ 3x - 5 \ \ , \text{ kun } x > 30 \end{cases}$

a) 24,5 kg
b) 51,0 kg

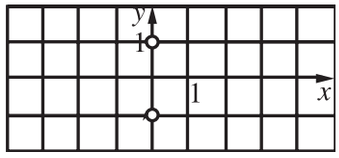
7. a)
$|x + 3| = \begin{cases} -x - 3, \text{ kun } x < -3 \\ x + 3, \text{ kun } x \geqslant -3 \end{cases}$



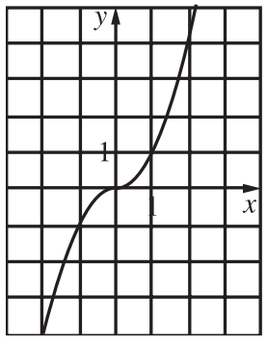
b)
$x + |4 - x| = \begin{cases} 4 \quad\quad , \text{ kun } x \leqslant 4 \\ 2x - 4, \text{ kun } x > 4 \end{cases}$



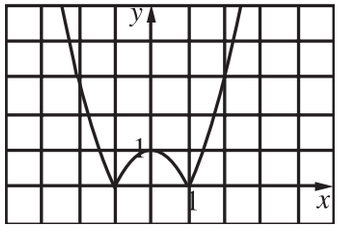
8. a) $\dfrac{x}{|x|} = \begin{cases} -1, \text{ kun } x < 0 \\ 1, \text{ kun } x > 0 \end{cases}$



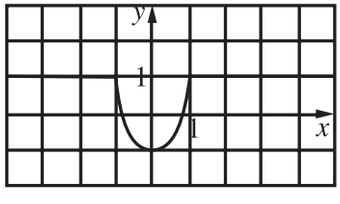
b) $x|x| = \begin{cases} -x^2, \text{ kun } x < 0 \\ x^2, \text{ kun } x \geqslant 0 \end{cases}$



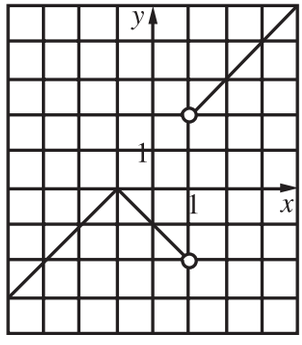
9. a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, \text{ kun } x \leqslant -1 \\ -x^2 + 1, \text{ kun } -1 < x < 1 \\ x^2 - 1, \text{ kun } x \geqslant 1 \end{cases}$



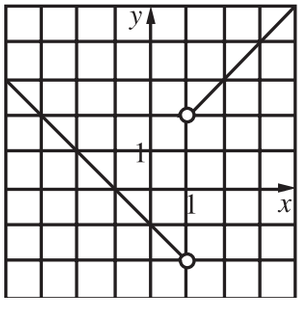
b) $g(x) = \begin{cases} 1, \text{ kun } x \leqslant -1 \\ 2x^2 - 1, \text{ kun } -1 < x < 1 \\ 1, \text{ kun } x \geqslant 1 \end{cases}$



10. a) $f(x) = \begin{cases} x + 1, \text{ kun } x \leqslant -1 \\ -x - 1, \text{ kun } -1 < x < 1 \\ x + 1, \text{ kun } x > 1 \end{cases}$



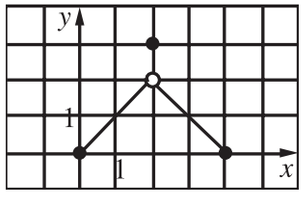
b) $f(x) = \begin{cases} -x - 1, \text{ kun } x < 1 \\ x + 1, \text{ kun } x > 1 \end{cases}$



11. $f(\sqrt{8}) = 3\sqrt{8} + 2, \quad f(\sqrt{10}) = 10, \quad f(3) = 11$

12. $h(x) = \begin{cases} 3 - x^2, \text{ kun } x \neq 0 \\ 1, \text{ kun } x = 0 \end{cases}$

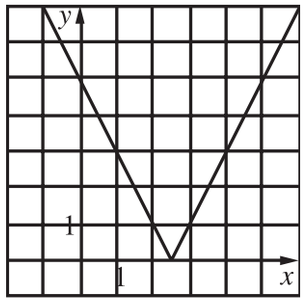
13.



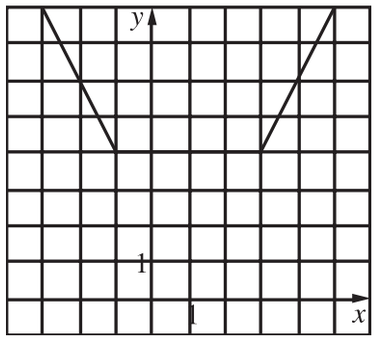
14. kohdassa -3

15. $f(t) = \begin{cases} 0, \text{ kun } 0 \leqslant t < 3\,400 \\ 85 + 0{,}1(t - 3\,400), \text{ kun } 3\,400 \leqslant t < 17\,000 \\ 1\,445 + 0{,}13(t - 17\,000), \text{ kun } 17\,000 \leqslant t < 50\,000 \\ 5\,735 + 0{,}16(t - 50\,000), \text{ kun } t \geqslant 50\,000 \end{cases}$

16. a)
$$f(x) = \begin{cases} 5 - 2x, \text{ kun } x \leqslant \frac{5}{2} \\ -5 + 2x, \text{ kun } x > \frac{5}{2} \end{cases}$$



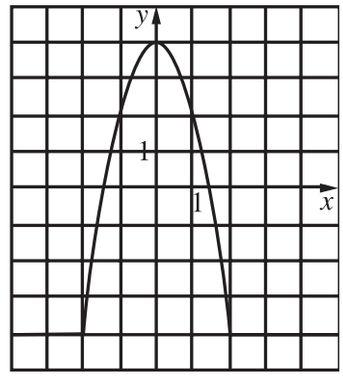
b)
$$g(x) = \begin{cases} -2x + 2, \text{ kun } x < -1 \\ 4, \text{ kun } -1 \leqslant x \leqslant 3 \\ 2x - 2, \text{ kun } x > 3 \end{cases}$$



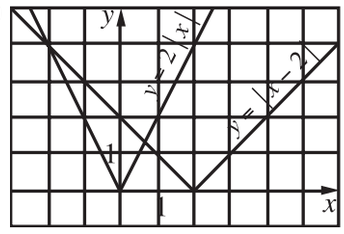
17. a)
$$f(x) = \begin{cases} -\frac{e^x}{x}, \text{ kun } x < 0 \\ \frac{e^{-x}}{x}, \text{ kun } x > 0 \end{cases}$$

b)
$$g(x) = \begin{cases} e^{-2x}, \text{ kun } x \leqslant 1 \\ e^{-2}, \text{ kun } x > 1 \end{cases}$$

18.
$$f(x) = \begin{cases} -4, \text{ kun } x < -2 \\ 4 - 2x^2, \text{ kun } -2 \leqslant x \leqslant 2 \\ -4, \text{ kun } x > 2 \end{cases}$$



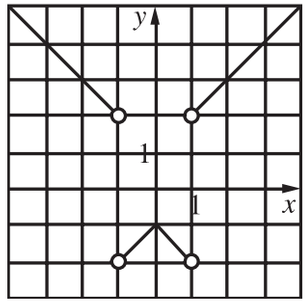
19. a)



b) $(-2, 4)$ ja $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$

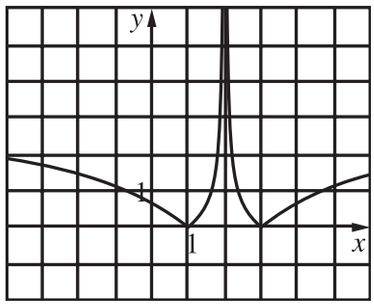
(Yhtälö $2|x| = |x - 2|$ toteutuu, kun $2x = x - 2$ tai $2x = -(x - 2)$.)

20.
$$f(x) = \begin{cases} -x + 1, \text{ kun } x < -1 \\ x - 1, \text{ kun } -1 < x \leqslant 0 \\ -x - 1, \text{ kun } 0 < x < 1 \\ x + 1, \text{ kun } x > 1 \end{cases}$$



21. Kasvaa väleillä $[1, 2[$ ja $[3, \infty[$ ja vähenee väleillä $]-\infty, 1]$ ja $]2, 3]$; pienin arvo kohdissa 1 ja 3.

$$f(x) = \begin{cases} \ln(-x+2), \text{ kun } x \leqslant 1 \\ -\ln(-x+2), \text{ kun } 1 < x < 2 \\ -\ln(x-2), \text{ kun } 2 < x < 3 \\ \ln(x-2), \text{ kun } x \geqslant 3 \end{cases}$$



(Funktion $\ln x$ arvot ovat negatiivisia, kun $0 < x < 1$, ja epänegatiivisia, kun $x \geqslant 1$. Funktion $f(x)$ kasvaminen ja väheneminen voidaan päätellä funktion $\ln x$ kasvamisesta ilman derivaattatarkasteluja. Funktio f saa pienimmän arvonsa kohdissa, joissa $\ln|x-2| = 0$.)

Funktion raja-arvo

22. a) 9 (Voidaan suoraan sijoittaa $x = 4$.)
b) 10

23. a) $-\frac{5}{2}$ b) Raja-arvoa ei ole.

24. a) 2 $(x^4 - 1 = (x^2+1)(x^2-1))$
b) 4 $(x^4 - 1 = (x^2+1)(x+1)(x-1))$

25. a) $\frac{1}{6}$ (Voidaan laventaa summalla $\sqrt{x} + 3$.
Voidaan myös supistaa suoraan, sillä $x - 9 = (\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)$.)
b) $\frac{1}{6}$ (Lavennetaan summalla $\sqrt{x+7} + 3$.)

26. $b = -36$, raja-arvo on -24.
(Välttämätön ehto raja-arvon olemassaololle on, että myös osoittajan arvo kohdassa -3 on 0.)

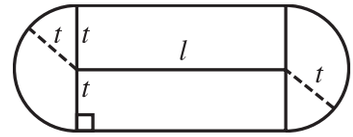
27. a) 2 b) 2 c) 2
d) -1 e) 3
f) Raja-arvoa ei ole.

28. a) Ei ole.
(Vasemmanpuoleinen raja-arvo kohdassa -1 on $\lim\limits_{x \to -1-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1-} (x+3) = -1 + 3 = 2$, ja oikeanpuoleinen raja-arvo kohdassa -1 on $\lim\limits_{x \to -1+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1+} (2x+5) = 2 \cdot (-1) + 5 = 3$. Koska vasemman- ja oikeanpuoleiset raja-arvot ovat eri suuret, raja-arvoa ei ole.)
b) On. Raja-arvo on 1.

29. a) $5 + a$ b) $a^2 - 1$
c) $a = -2$ tai $a = 3$.
Kun $a = -2$, raja-arvo on 3.
Kun $a = 3$, raja-arvo on 8.
(Tulee olla $5 + a = a^2 - 1$.)

30. a) Ei ole. (Vasemmanpuoleinen raja-arvo kohdassa 0 on -1 ja oikeanpuoleinen 1.)
b) On, raja-arvo on 0.
c) Ei ole. (Vasemmanpuoleinen raja-arvo kohdassa 0 on 3 ja oikeanpuoleinen -3.)

31. $A(t) = 2lt + \pi t^2$, raja-arvo on $2l$.



32. a) 2 $\left(\frac{e^{2x}-1}{e^x-1} = \frac{(e^x+1)(e^x-1)}{e^x-1}\right)$
b) -2 $(\cos^2 x = 1 - \sin^2 x)$

33. a) -1 (Kun $x \to 0$, niin $-x \to 0$.)
b) 5 (Kun $h \to 0$, niin $3 + h \to 3$.)
c) 4 d) -1 e) 5

34. a) $-\frac{1}{2}$ b) 2

35. määrittelyjoukko $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, raja-arvo -2

36. $a = -4$, raja-arvo on -2.

37. a) 30 b) $\frac{1}{3}$

38. a) 2 b) 1 c) Ei ole.

39. $a = -\frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{2}$

40. $a = \frac{14}{3}$, $b = -18$, raja-arvo on 12.

41. Kun $-3 < x < -1$ ja $x \neq -2$, niin $f(x) = -\frac{1}{x}$.

Kun $x = -2$, f ei ole määritelty.

$\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \frac{1}{2}$

42. 0 (Kun $-1 < x < 1$ ja $x \neq 0$, niin lauseke on $-\frac{x^2}{|x|} = -|x|$.)

43. a) d (Kun $x \to 0+$, niin $-x \to 0-$.)
b) c (Kun $x \to 0$, niin $|x| \to 0+$.)
c) c (Kun $x \to -1-$, niin $x^2 - 1 \to 0+$.)
d) d (Kun $x \to 0$, niin $\cos x - 1 \to 0-$.)

44. a) $2\sqrt{2}$ (Kun sijoitetaan $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, lauseke sievenee muotoon $\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x(\sin x - \cos x)}$.)

b) 0

45. a) Koska $f(-0) = -f(0)$ ja $-0 = 0$, niin $f(0) = -f(0)$ eli $2f(0) = 0$. Siis $f(0) = 0$.

b) Oletetaan, että $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = a$ on olemassa.

Kun $x \to 0$, niin myös $-x \to 0$, joten myös $\lim\limits_{x \to 0} f(-x) = a$. Toisaalta

$\lim\limits_{x \to 0} f(-x) = \lim\limits_{x \to 0} -f(x) = -a$.

Siis $a = -a$, joten $a = 0$.

c) Ehdon $f(-x) = -f(x)$ täyttävä funktio $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolla on raja-arvo kohdassa 0, on esimerkiksi funktio $f(x) = x$ (tai mikä tahansa paritonta astetta oleva potenssifunktio) tai funktio $f(x) = \sin x$.

Ehdon $f(-x) = -f(x)$ täyttävä funktio $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolla ei ole raja-arvoa kohdassa 0, on esimerkiksi funktio f, jolle $f(x) = \frac{1}{x}$, kun $x \neq 0$, ja $f(0) = 0$, tai funktio

$$f(x) = \begin{cases} -1, \text{ kun } x < 0 \\ 0, \text{ kun } x = 0 \\ 1, \text{ kun } x > 0. \end{cases}$$

46. Oletetaan, että on olemassa $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = a$.

Koska $-x \to 0$, kun $x \to 0$, niin on myös $\lim\limits_{x \to 0} f(-x) = a$, jolloin

$\lim\limits_{x \to 0} f(x)f(-x) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to 0} f(-x)$

$= a \cdot a = a^2$.

Toisaalta on $\lim\limits_{x \to 0} f(x)f(-x) = \lim\limits_{x \to 0} -1 = -1$.

Saadaan siis $a^2 = -1$, mikä on mahdotonta.

Siten raja-arvoa $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ ei voi olla olemassa.

Ominaisuus on esimerkiksi funktiolla

$$f(x) = \begin{cases} -1, \text{ kun } x < 0 \\ 1, \text{ kun } x > 0. \end{cases}$$

47. Tulemalla lähemmäs kuin etäisyydelle 0,005 luvusta 3. Luvuksi δ kelpaa siis luku 0,005 tai mikä tahansa lukua 0,005 pienempi positiivinen luku.

$\left(|f(x) - 12| = \left|\frac{2x^2 - 18}{x - 3} - 12\right|\right.$

$= \left|\frac{2(x+3)(x-3)}{x-3} - 12\right| = |2(x+3) - 12|$

$= |2x - 6| = 2|x - 3|$ ja

$2|x - 3| < 0{,}01$, kun $0 < |x - 3| < 0{,}005$.)

48. Luvuksi δ kelpaa luku a) 0,02 b) 0,0002

c) $\frac{\varepsilon}{5}$ tai mikä tahansa tätä pienempi positiivinen luku. (Etäisyys $|f(x) - 3|$ sievenee muotoon $5|x|$.)

49. a) $|f(x) - 10| < \varepsilon$, kun $0 < |x - 2| < \frac{\varepsilon}{5}$.

Siis luvuksi δ kelpaa luku $\frac{\varepsilon}{5}$ tai mikä tahansa sitä pienempi positiivinen luku.

b) $|f(x) - 30| < \varepsilon$, kun $0 < |x - 5| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Siis luvuksi δ kelpaa luku $\frac{\varepsilon}{3}$ tai mikä tahansa sitä pienempi positiivinen luku.

Funktion jatkuvuus

50. a) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$ ja $f(1) = 2$.

Koska $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$, funktio f on jatkuva kohdassa 1.

b) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3 \cdot 1 - 1 = 2$ ja $f(1) = 4$.

Koska $\lim\limits_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$, funktio f on epäjatkuva kohdassa 1.

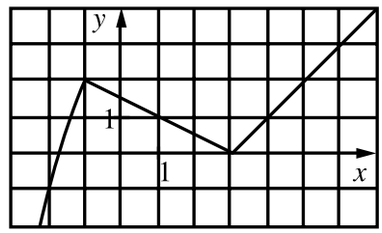
51. a) Ei ole. (Rationaalifunktiot ovat jatkuvia koko määrittelyjoukossaan.)
b) On, kohta $x = 0$. (Funktiolla g ei ole raja-arvoa kohdassa 0.)

52. $f(-4) = -8$ (Tulee olla $\lim\limits_{x \to -4} f(x) = f(-4)$.)

53. a) Ei ole. b) On. c) On.
d) On. e) Ei ole. f) On.

54. a) Ei ole. (Kummallakin määrittelyjoukon osavälillä $]-\infty, 2[$ ja $]2, \infty[$ funktio on polynomifunktio.)
b) On. (Funktio ei ole oikeanpuoleisesti jatkuva kohdassa 2, sillä $g(2) = 5$ ja $\lim\limits_{x \to 2+} g(x) = 7$.)
c) Ei ole. (Funktio on vasemmanpuoleisesti jatkuva kohdassa 2, joten riittää, kun osoitetaan, että $\lim\limits_{x \to 2+} h(x) = h(2)$.)

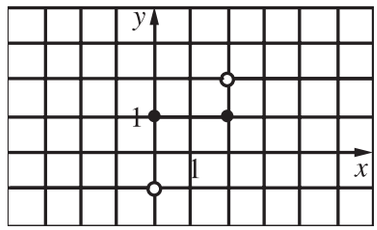
55. $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{2}$



(Tulee olla $\lim\limits_{x \to -1+} f(x) = f(-1)$ eli $-a + b = 2$ ja $\lim\limits_{x \to 3-} f(x) = f(3)$ eli $3a + b = 0$.)

56. Esimerkiksi funktio

$$f(x) = \begin{cases} -1, \text{ kun } x < 0 \\ 1, \text{ kun } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 2, \text{ kun } x > 2. \end{cases}$$



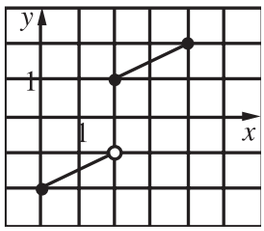
Funktiolle f on $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) \neq f(0)$, joten f ei ole vasemmanpuoleisesti jatkuva kohdassa 0, ja $\lim\limits_{x \to 2+} f(x) \neq f(2)$, joten f ei ole oikeanpuoleisesti jatkuva kohdassa 2.
(Funktion f tulee olla määritelty kaikilla muuttajan arvoilla.)

57. Yhtälön $\frac{5}{x} = \pi + x^2$ juuret ovat funktion

$f(x) = \frac{5}{x} - x^2 - \pi$ nollakohtia. Koska arvot $f(1) \approx 0{,}86$ ja $f(1{,}2) \approx -0{,}41$ ovat erimerkkiset ja funktio f on jatkuva välillä $[1; 1{,}2]$, funktiolla f on nollakohta välillä $]1; 1{,}2[$.

58. Esimerkiksi funktio

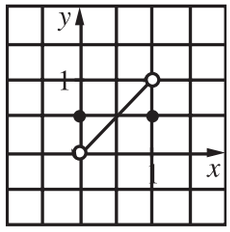
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - 2 \text{ , kun } 0 \leqslant x < 2 \\ \frac{1}{2}x \text{ , kun } 2 \leqslant x \leqslant 4. \end{cases}$$



(Bolzanon lauseen mukaan ehdot täyttävä funktio ei voi olla jatkuva.)

59. Esimerkiksi funktio

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, \text{ kun } x = 0 \\ x, \text{ kun } 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2}, \text{ kun } x = 1. \end{cases}$$



Ehdot täyttävä funktio ei voi olla kasvava. (Jos funktio $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ on kasvava, niin funktiolla f on pienin arvo $f(0)$ ja suurin arvo $f(1)$.)

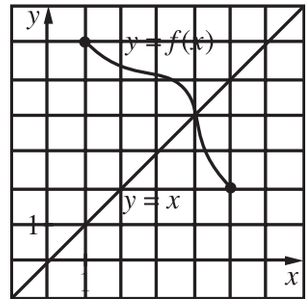
60. a) Jatkuva funktio saa välillä jokaisen arvon kahden saamansa arvon välistä. Koska f saa arvot 4 ja -7, se saa jossain välin $]-3, 5[$ pisteessä arvon -6. Tässä pisteessä funktion $|f|$ arvo on 6. (Päättelyssä voi käyttää hyväksi vapaasti hahmoteltua ehdot täyttävän funktion kuvaajaa.)

b) suurin arvo 7 ja pienin arvo 0

(Koska f saa arvot 4 ja -7 ja f on jatkuva, se saa jossain välin $]-3, 5[$ pisteessä arvon 0. Siis funktion $|f|$ pienin arvo on 0.)

61. Koska funktio f on jatkuva, myös funktio $g : [1, 5] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x$, on jatkuva. Koska arvot $g(1) = 5$ ja $g(5) = -3$ ovat erimerkkiset, välillä $]1, 5[$ on ainakin yksi sellainen piste x, että $g(x) = 0$ eli $f(x) - x = 0$ eli $f(x) = x$.

Kuvio havainnollistaa, kuinka pisteitä $(1, 6)$ ja $(5, 2)$ yhdistävä jatkuvan funktion kuvaaja väistämättä leikkaa suoran $y = x$. Leikkauspisteen x-koordinaatille pätee $f(x) = x$.



62. Ei voida. (Funktiolla f ei ole raja-arvoa kohdassa 3.)

63. 7 (Toisen asteen polynomin $x^2 + x - 12$ nollakohdat ovat 3 ja -4, joten $x^2 + x - 12 = (x - 3)(x + 4)$.)

64. $a = -5$, $f(1) = -3$

$((x^2 - 5x + 4) = (x - 1)(x - 4))$

65. On.

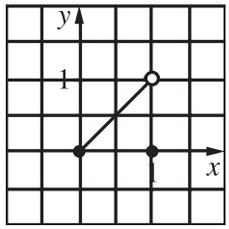
66. $a = -3,\ b = 5$

(Funktio f on oikeanpuoleisesti jatkuva kohdassa 1. Funktio f on vasemmanpuoleisesti jatkuva, jos raja-arvo $\lim\limits_{x \to 1-} f(x)$ on olemassa ja yhtä suuri kuin $f(1) = 1 + b$. Raja-arvo on olemassa, kun $a = -3$. Tällöin raja-arvo on 6.)

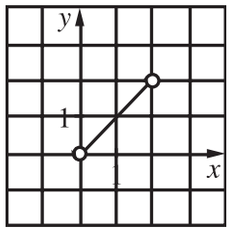
67. Yhtälön juuret ovat polynomifunktion $f(x) = 2x^3 + ax^2 + a^2x + 1$ nollakohtia. Koska funktio f on kaikkialla jatkuva, riittää, kun osoitetaan, että arvot $f(-1) = -a^2 + a - 1$ ja $f(0) = 1$ ovat erimerkkiset. Yhtälöllä $-a^2 + a - 1 = 0$ ei ole juuria, ja lausekkeen $-a^2 + a - 1$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten lauseke on kaikilla a:n arvoilla negatiivinen.

68. Esimerkiksi funktio

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ kun } 0 \leqslant x < 1 \\ 0, \text{ kun } x = 1. \end{cases}$$

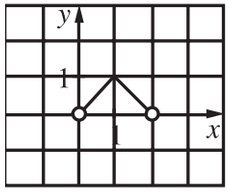


69. a) Esimerkiksi funktio $f\colon]0, 2[\to \mathbb{R},\ f(x) = x$.



b) Esimerkiksi funktio

$$f(x) = \begin{cases} x & , \text{kun } 0 < x \leqslant 1 \\ -x + 2, & \text{kun } 1 < x < 2. \end{cases}$$



70. a) $f(0) = 1$

(Koska $f(0 + 0) = f(0)f(0)$, niin $f(0) = f(0)^2$. Siis $f(0) = 0$ tai $f(0) = 1$. Jos olisi $f(0) = 0$, niin olisi $f(x) = f(x + 0) = f(x)f(0) = f(x) \cdot 0 = 0$ kaikilla x eli f olisi vakiofunktio 0.)

b) Oletetaan, että f on jatkuva kohdassa 0 eli $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$. Olkoon a jokin luku. Merkitään $x - a = h$, jolloin $x = a + h$. Kun $x \to a$, niin $h \to 0$. Tällöin $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{h \to 0} f(a + h)$

$= \lim\limits_{h \to 0} f(a)f(h) = f(a) \lim\limits_{h \to 0} f(h) = f(a) \cdot 1 = f(a)$.

Siis f on jatkuva kohdassa a.

c) Esimerkiksi funktio $f(x) = 3^x$, sillä $f(a + b) = 3^{a+b} = 3^a\, 3^b = f(a)f(b)$.

(Esimerkiksi käy mikä tahansa funktio k^x, missä $k > 0$.)

71. Esimerkiksi funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x$, on jatkuva jaksollinen funktio, sillä $\sin(x + 2\pi) = \sin x$. Myös esimerkiksi jokainen vakiofunktio on koko reaalilukujen joukossa määritelty jatkuva jaksollinen funktio jaksona mikä tahansa luku $\omega \neq 0$.

Yksi esimerkki epäjatkuvasta jaksollisesta funktiosta $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on funktio

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ kun } x \text{ on kokonaisluku} \\ 0, \text{ kun } x \text{ ei ole kokonaisluku.} \end{cases}$$

Funktio f on epäjatkuva jokaisessa kokonaislukupisteessä, ja $f(x + 1) = f(x)$ kaikilla x.

Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivoituva jaksollinen funktio. Yhdistetyn funktion derivointisäännön nojalla $\mathrm{D}f(x + \omega) = f'(x + \omega) \cdot \mathrm{D}(x + \omega)$ $= f'(x + \omega) \cdot 1 = f'(x + \omega)$. Toisaalta $f(x + \omega) = f(x)$, joten $\mathrm{D}f(x + \omega) = \mathrm{D}f(x) = f'(x)$. Siis $f'(x + \omega) = f'(x)$ kaikilla x eli derivaattafunktio f' on jaksollinen.

Jatkuva jaksollinen funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ saa kaikki arvonsa jakson pituisella välillä $[0, \omega]$ (tai välillä $[\omega, 0]$, jos $\omega < 0$). Koska jatkuvalla funktiolla on suljetulla välillä suurin arvo, funktio f saa välillä $[0, \omega]$ suurimman arvon, joka on funktion f suurin arvo. Siis funktio f saa suurimman arvon.

72. Olkoon $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x$.
Koska f on jatkuva, myös g on jatkuva.
Koska $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$, niin $g(0) = f(0) \geqslant 0$ ja $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 1 - 1 = 0$.
Siis jompikumpi päätepiste on g:n nollakohta, tai sitten $g(0) > 0$ ja $g(1) < 0$, jolloin g:llä on Bolzanon lauseen nojalla nollakohta välillä $]0, 1[$.
Siis funktiolla g on välillä $[0, 1]$ nollakohta eli sellainen kohta x, jossa $f(x) - x = 0$ eli $f(x) = x$.

73. Olkoon $f(0) = a$. Koska f on jatkuva kohdassa 0, niin $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = a$.
Koska $-x \to 0$, kun $x \to 0$, niin myös $\lim\limits_{x \to 0} f(-x) = a$. Siis $\lim\limits_{x \to 0} f(x)f(-x) = a^2$.
Toisaalta, koska $f(x)f(-x) < 0$, kun $x \neq 0$, niin $\lim\limits_{x \to 0} f(x)f(-x) \leqslant 0$.
Siis $a^2 \leqslant 0$, joten $a = 0$.

74. Oletetaan ensin, että $f(a) < f(b)$. Olkoon c jokin luku, jolle pätee $f(a) < c < f(b)$. Koska f on jatkuva, myös funktio $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - c$, on jatkuva. Koska arvot $g(a) = f(a) - c < 0$ ja $g(b) = f(b) - c > 0$ ovat erimerkkiset, funktiolla g on Bolzanon lauseen nojalla välillä $]a, b[$ ainakin yksi nollakohta eli sellainen kohta, jossa $f(x) - c = 0$ eli $f(x) = c$.
Tapaus $f(a) > f(b)$ käsitellään samalla tavalla.

75. a) Kuvaaja kulkee suorien $y = x$ ja $y = -x$ välissä.
b) Koska $0 \leqslant |f(x)| \leqslant |x|$ kaikilla x, niin $0 \leqslant |f(0)| \leqslant 0$, joten $f(0) = 0$. Koska lisäksi $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$, niin $\lim\limits_{x \to 0} |f(x)| = 0$.
Siis $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$.

76. f on jatkuva kohdassa 0.
(Koska $\left|\sin \frac{1}{x}\right| \leqslant 1$ kaikilla $x \neq 0$, niin
$0 \leqslant |f(x)| \leqslant |x|$ kaikilla $x \neq 0$.
Koska $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$, niin myös $\lim\limits_{x \to 0} |f(x)| = 0$.
Siis $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$.)

77. On. (Koska $0 \leqslant |f(x)| \leqslant |x|$ kaikilla x ja koska $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$, niin myös $\lim\limits_{x \to 0} |f(x)| = 0$.
Siis $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$.)

78. Olkoot $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ ja $g : [0, 2] \to \mathbb{R}$ funktiot, jotka ilmaisevat Karin etäisyyden kodista t tuntia liikkeellelähdön jälkeen, f perjantaina ja g sunnuntaina. Etäisyys muuttuu jatkuvalla tavalla (ilman hyppäyksiä), joten f ja g ovat jatkuvia. Siten myös funktio $h : [0, 2] \to \mathbb{R}$, $h(t) = f(t) - g(t)$, on jatkuva.
Olkoon mökin etäisyys kodista d. Tällöin $h(0) = f(0) - g(0) = 0 - d = -d$ ja $h(2) = f(2) - g(2) = d - 0 = d$.
Koska arvot $h(0)$ ja $h(2)$ ovat erimerkkiset, funktiolla h on Bolzanon lauseen nojalla välillä $]0, 2[$ nollakohta eli sellainen kohta t, että $f(t) = g(t)$.

79. Olkoon $f : [0, 10] \to \mathbb{R}$ funktio, joka ilmaisee kuluneen ajan, kun juoksija on juossut x kilometriä. Funktio f on jatkuva, joten myös funktio $g : [0, 9] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x + 1) - f(x)$, on jatkuva. On osoitettava, että välillä $[0, 9]$ on ainakin yksi kohta, jossa $g(x) = 3$.
Funktiolle g pätee
$g(0) + g(1) + \ldots + g(9)$
$= f(1) - f(0) + f(2) - f(1) + \ldots + f(10) - f(9)$
$= f(10) - f(0) = 30$.
Koska funktio g on jatkuva, se saa välillä $[0, 9]$ suurimman arvon M ja pienimmän arvon m.
Jos on $M < 3$, niin
$g(0) + g(1) + \ldots + g(9) \leqslant 10M < 30$,
mikä on mahdotonta.
Vastaavasti, jos $m > 3$, niin
$g(0) + g(1) + \ldots + g(9) \geqslant 10m > 30$,
mikä on mahdotonta.
Siis $m \leqslant 3 \leqslant M$. Koska jatkuva funktio saa suljetulla välillä jokaisen arvon kahden saamansa arvon välistä, niin välillä $[0, 9]$ on kohta, jossa $g(x) = 3$.

Derivaatta

80. $f'(x) = -3e^{-3x}$, kulmakerroin -3
(Tangentin kulmakerroin on $f'(0)$.)

81. a) $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \dfrac{x^2-1}{x-1} = x+1 \to 2$,
kun $x \to 1$

b) $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{(1+h)^2-1}{h} = \dfrac{2h+h^2}{h}$
$= 2+h \to 2$, kun $h \to 0$

82. a) Ei ole.
(Erotusosamäärän vasemmanpuoleinen raja-arvo on $\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0-} x = 0$ ja oikeanpuoleinen raja-arvo $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{2x}{x} = \lim\limits_{x\to 0+} 2 = 2$.)

b) On, $f'(0) = 0$.
(Erotusosamäärän vasemmanpuoleinen raja-arvo on $\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0-} x = 0$ ja oikeanpuoleinen raja-arvo $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{2x^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0+} 2x = 0$.)

83. a) Ei ole.
(Erotusosamäärän vasemmanpuoleinen raja-arvo on $\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{-x}{x} = \lim\limits_{x\to 0-} (-1) = -1$ ja oikeanpuoleinen raja-arvo $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{x}{x} = \lim\limits_{x\to 0+} 1 = 1$.)

b) On. ($\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{x|x|}{x} = |x| \to 0$,
kun $x \to 0$)

c) On. (Erotusosamäärän vasemmanpuoleinen raja-arvo on
$\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{-x\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0-} (-\sin x) = 0$ ja
oikeanpuoleinen raja-arvo
$\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{x\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0+} \sin x = 0$.)

84. a) ei koskaan b) joskus c) aina
d) joskus e) aina

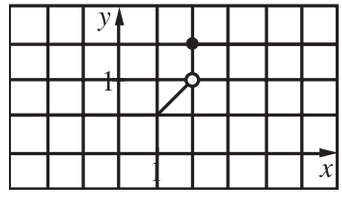
85. Tiedetään, että funktio g on jatkuva ja derivoituva kohdassa 1 ja että $g'(1) = 2$. Mitään muuta ei tiedetä.

86. a) $2f(a)f'(a)$
($\dfrac{f(x)^2-f(a)^2}{x-a} = \dfrac{(f(x)+f(a))(f(x)-f(a))}{x-a}$.
Koska f on jatkuva kohdassa a, niin
$f(x) \to f(a)$, kun $x \to a$.)

b) $\dfrac{f(a)f'(a)}{a}$

87. Esimerkiksi funktio

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ kun } x < 1 \\ x, \text{ kun } 1 \leqslant x < 2 \\ 3, \text{ kun } x \geqslant 2. \end{cases}$$



Funktio f ei ole vasemmanpuoleisesti jatkuva kohdassa 2, sillä $\lim\limits_{x\to 2-} f(x) = 2 \neq f(2)$. Koska f on epäjatkuva kohdassa 2, f:llä ei ole derivaattaa kohdassa 2. Funktio f ei ole derivoituva kohdassa 1, sillä erotusosamäärän toispuoliset raja-arvot $\lim\limits_{x\to 1-} \dfrac{1-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1-} 0 = 0$ ja
$\lim\limits_{x\to 1+} \dfrac{x-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1+} 1 = 1$ ovat eri suuret.

88. $g'(0) = f(0)$
Tulosta voidaan soveltaa funktioon
$f(x) = |x| + 1$, sillä funktio f on jatkuva kohdassa 0.
(Funktion g erotusosamäärä kohdassa 0 on $\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = \dfrac{xf(x)}{x} = f(x)$. Koska funktio f on jatkuva kohdassa 0, niin $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$.
Siis $g'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}$
$= \lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$.)

89. Koska funktiot $f(x)g(x)$ ja x ovat sama funktio, niillä on myös sama derivaattafunktio, eli $f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = 1$ kaikilla x. Siis ei voi olla a) $f(x_0) = g(x_0) = 0$ b) $f'(x_0) = g'(x_0) = 0$.

90. a) Funktion $f(x)e^{x^2}$ derivaatta on nolla jokaisessa kohdassa x, joten integraalilaskennan peruslauseen nojalla funktio $f(x)e^{x^2}$ on vakiofunktio.

b) Funktiot muotoa $f(x) = ke^{-x^2}$, missä k on vakio.

91. Derivaatta on $\frac{1}{2}$. (Erotusosamäärä on a-kohdassa $\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ ja b-kohdassa $\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}$.)

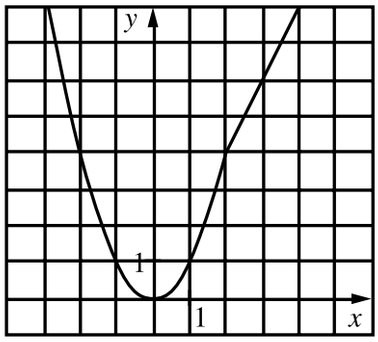
92. Derivaatta on -1.
(Erotusosamäärän eri muodot ovat

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\frac{1}{x}-1}{x-1} \quad \text{ja}$$

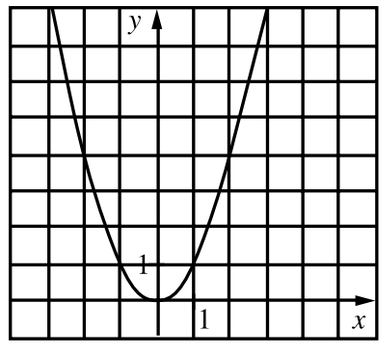
$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{\frac{1}{1+h}-1}{h}.)$$

93. a) 1 (Funktion e^x erotusosamäärä kohdassa 0.)
b) 0 (Funktion $\cos x$ erotusosamäärä kohdassa 0.)
c) 1 (Funktion $\sin x$ erotusosamäärä kohdassa 0.)
d) 1 (Funktion $\ln(x+1)$ erotusosamäärä kohdassa 0.)

94. a) Ei ole.

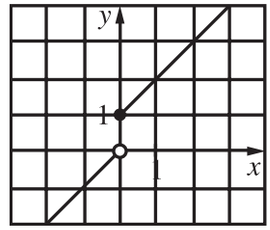


b) On. ($f'(2) = 4$)



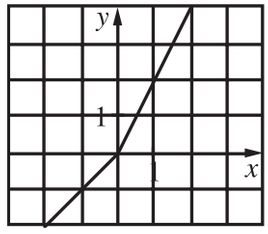
95. Funktio f on kasvava, jos $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ aina, kun $x_1 < x_2$.
Esimerkki epäjatkuvasta kasvavasta funktiosta on $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x & , \text{kun } x < 0 \\ x+1 & , \text{kun } x \geqslant 0. \end{cases}$$



Esimerkki kasvavasta funktiosta, joka on origossa jatkuva mutta ei derivoituva, on $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} x & , \text{kun } x < 0 \\ 2x & , \text{kun } x \geqslant 0. \end{cases}$$



(Funktioiden f ja g kasvaminen väleillä $]-\infty, 0[$ ja $[0, \infty[$ perustellaan esimerkiksi derivaatan avulla. Lisäksi tulee molemmille funktioille perustella, että kun $x_1 < 0 \leqslant x_2$, niin arvo kohdassa x_2 on vähintään yhtä suuri kuin arvo kohdassa x_1.)

96. Funktion $g(x) = f(x)^2 + f'(x)^2$ derivaatta on nolla kaikilla x, joten integraalilaskennan peruslauseen nojalla funktio $g(x) = f(x)^2 + f'(x)^2$ on vakiofunktio.

Esimerkki ehdon täyttävästä funktiosta on funktio $f(x) = \sin x$, sillä $f''(x) = -\sin x$, joten $f(x) + f''(x) = 0$ kaikilla x.

97. a) arvoilla $x = \frac{a}{2} + n \cdot \pi$, n kokonaisluku

b) Funktion f derivaatta on 0 koko määrittelyjoukossa, joten integraalilaskennan peruslauseen nojalla funktio f on jokaisella määrittelyjoukon välillä vakiofunktio.

(Derivaatta havaitaan nollaksi, kun derivaattafunktion lausekkeen osoittajaan sovelletaan trigonometristen funktioiden ominaisuutta $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Käyttämällä ominaisuuksia $\sin(x + \pi) = -\sin x$ ja $\cos(x + \pi) = -\cos x$ voitaisiin osoittaa, että funktion arvo on jokaisella välillä sama vakio.)

98. Oletetaan, että funktio f on derivoituva kohdassa 0 eli raja-arvo

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = f'(0)$$ on olemassa. Tällöin kohdassa x on

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x) + f(h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = f'(0).$$

Siis f on derivoituva kohdassa x ja $f'(x) = f'(0)$.

99. Oletetaan, että kyseiset ehdot toteuttava funktio on derivoituva kohdassa nolla eli on olemassa raja-arvo $\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - 1}{h} = f'(0)$.

Tällöin $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(x)f(h) - f(x)}{h}$

$$= f(x) \frac{f(h) - 1}{h} \to f(x)f'(0), \text{ kun } h \to 0.$$

Siis f on derivoituva kaikkialla ja $f'(x) = f'(0)f(x)$.

100. a) $f(0) = 0$

b) Koska $f(0) = 0$, niin oletuksen mukaan $\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 3$. Tällöin

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(x) + f(h) + 2xh - f(x)}{h}$$

$$= \frac{f(h)}{h} + 2x \to 3 + 2x, \text{ kun } h \to 0.$$

Siis f on derivoituva kaikkialla ja $f'(x) = 3 + 2x$.

c) $f(x) = 3x + x^2$

(Koska $f'(x) = 3 + 2x$, niin $f(x) = 3x + x^2 + C$, missä C on vakio. Koska $f(0) = 0$, niin $C = 0$.)

101. Funktion f derivaatta kohdassa $x = a$ on

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Esimerkki funktiosta, joka ei ole derivoituva kohdassa $x = 1$, on funktio $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} 1, \text{ kun } x \leqslant 1 \\ x, \text{ kun } x > 1. \end{cases}$$

Funktio f on derivoituva kohdassa $x = 0$.

(Derivaatan määritelmässä voidaan käyttää myös erotusosamäärän h-muotoa. Esimerkkifunktion g derivoitumattomuus kohdassa 1 perustellaan määrittämällä erotusosamäärän toispuoliset raja-arvot. Funktion f erotusosamäärä kohdassa 0 on $x \sin \frac{1}{x}$, jonka raja-arvo kohdassa 0 on 0 (vrt. tehtävä 76).)

102. a) $\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$

$= \dfrac{f(a+h)-f(a)+f(a)-f(a-h)}{2h}$

$= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} + \dfrac{f(a-h)-f(a)}{-h}\right)$

$= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} + \dfrac{f(a+(-h))-f(a)}{-h}\right).$

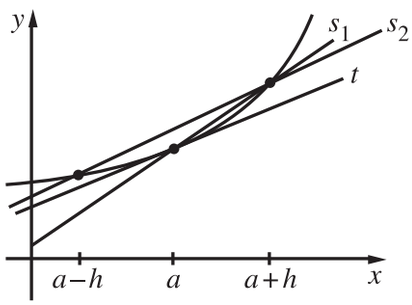
Kun $h \to 0$, niin $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \to f'(a)$.

Kun $h \to 0$, niin $-h \to 0$, joten myös $\dfrac{f(a+(-h))-f(a)}{-h} \to f'(a)$. Siis

$\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} \to \dfrac{1}{2}(f'(a)+f'(a))$

$= f'(a)$, kun $h \to 0$.

b) Kuviossa on esimerkki tilanteesta, jossa ”2h-kaavan” antama arvio tangentin t kulmakertoimelle $f'(a)$ on parempi kuin erotusosamäärän antama. Suoran s_1 kulmakerroin on erotusosamäärä $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ja suoran s_2 $\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$.



c) Funktio $f(x) = |x|$ ei ole derivoituva kohdassa 0. Kuitenkin on

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0+h)-f(0-h)}{2h} = 0.$

Raja-arvo äärettömyydessä

103. a) Ei raja-arvoa, arvot pienenevät rajatta.

b) 3

c) -4 $\left(\dfrac{3-4e^x}{e^x} = \dfrac{3}{e^x} - 4 = 3e^{-x} - 4\right)$

d) Ei raja-arvoa, arvot suurenevat rajatta.

104. a) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$\left(f(x) = \dfrac{5}{x} - \dfrac{12}{x^2}\right)$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 4$ $\left(g(x) = 4 + \dfrac{5}{x}\right)$

c) ei raja-arvoa, $h(x) \to -\infty$, kun $x \to \infty$, ja $h(x) \to \infty$, kun $x \to -\infty$

$\left(f(x) = -3x + \dfrac{1}{x}\right)$

105. a) $f(x) \to 0$, kun $x \to \infty$ tai $x \to -\infty$

$\left(f(x) = \dfrac{\frac{4}{x}}{2 - \frac{1}{x}}\right)$

b) $g(x) \to 3$, kun $x \to \infty$ tai $x \to -\infty$

$\left(g(x) = \dfrac{6 + \frac{4}{x}}{2 - \frac{1}{x}}\right)$

c) ei raja-arvoja, $h(x) \to \infty$, kun $x \to \infty$, ja $h(x) \to -\infty$, kun $x \to -\infty$

$\left(h(x) = \dfrac{2x + \frac{3}{x}}{2 - \frac{1}{x}}\right)$

106. a) $f(x) \to 0$, kun $x \to \infty$ tai $x \to -\infty$

b) $g(x) \to \dfrac{1}{2}$, kun $x \to \infty$ tai $x \to -\infty$

c) ei raja-arvoa, $h(x) \to \infty$, kun $x \to \infty$ tai $x \to -\infty$

107. $\ln(1 + e^x) - x = \ln(1 + e^x) - \ln e^x = \ln \dfrac{1 + e^x}{e^x}$

$= \ln\left(\dfrac{1}{e^x} + 1\right) \to \ln(0 + 1) = \ln 1 = 0,$

kun $x \to \infty$

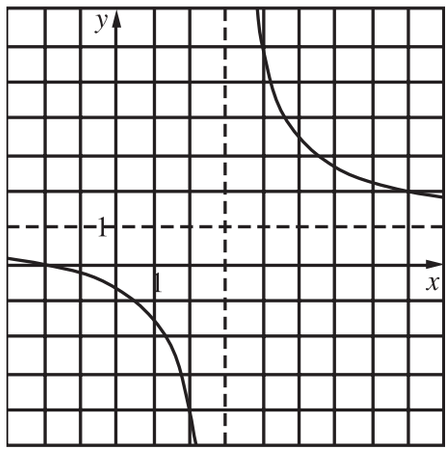
108. suurin arvo $f(1) = 2$ ja pienin arvo $f(-1) = -2$
(Koska $f(x) \to 0$, kun $x \to \infty$ tai $x \to -\infty$, niin kulkukaavion perusteella maksimiarvo $f(1) = 2$ on suurin arvo ja minimiarvo $f(-1) = -2$ on pienin arvo.)

109. a) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$

b) Aidosti vähenevä väleillä $]-\infty, 3[$ ja $]3, \infty[$, ääriarvoja ei ole.

(Derivaattafunktio $f'(x) = -\dfrac{5}{(x-3)^2}$ on negatiivinen funktion f koko määrittelyjoukossa $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.)

c)

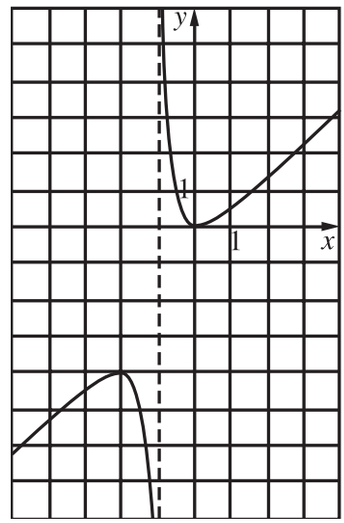


Kuvaajalla on pystysuora asymptootti $x = 3$ ja vaakasuora asymptootti $y = 1$. Suurinta ja pienintä arvoa ei ole.
($f(x) \to -\infty$, kun $x \to 3-$, ja
$f(x) \to \infty$, kun $x \to 3+$)

110. a) aidosti kasvava väleillä $]-\infty, -2]$ ja $[0, \infty[$, aidosti vähenevä väleillä $[-2, -1[$ ja $]-1, 0]$

b) Maksimikohta -2 ja vastaava maksimiarvo -4, minimikohta 0 ja vastaava minimiarvo 0. Funktiolla f ei ole suurinta eikä pienintä arvoa.

c)



(Kuvaajalla on pystysuorana asymptoottina suora $x = -1$.)

111. a) $\dfrac{3}{5}$ $\left(\dfrac{\sqrt{9x^2 + x}}{5x} = \dfrac{1}{5}\sqrt{\dfrac{9x^2 + x}{x^2}} = \dfrac{1}{5}\sqrt{9 + \dfrac{1}{x}}\right.$, kun $x > 0$)

b) $\dfrac{3}{2}$ $\left(\sqrt{x^2 + 3x} - x = \dfrac{3x}{\sqrt{x^2 + 3x} + x}\right.$

$= \dfrac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + 1}$, kun $x > 0$)

112. a) $\dfrac{2}{3}$ $\left(\dfrac{2e^x}{1 + 3e^x} = \dfrac{2}{e^{-x} + 3}\right)$

b) 0 $(e^x \to 0$, kun $x \to -\infty)$

113. a) $f(x) \to 0$, kun $x \to \infty$ tai $x \to -\infty$

b) $g(x) \to -\dfrac{5}{2}$, kun $x \to \infty$ tai $x \to -\infty$

c) $h(x) \to -\infty$, kun $x \to \infty$, ja
$h(x) \to \infty$, kun $x \to -\infty$

114. a) $\ln 2$ b) 0
c) Ei raja-arvoa. ($\ln x \to -\infty$, kun $x \to 0+$)

115. a) $f(x) \to 2$, kun $x \to \infty$ tai $x \to -\infty$

$(f(x) = \dfrac{4x-2}{2x+1})$

b) $g(x) \to 0$, kun $x \to \infty$ tai $x \to -\infty$

$(g(x) = -\dfrac{12}{x-3})$

116. a) suurin arvo $\frac{3}{2}$ ja pienin arvo $-\frac{1}{2}$

b) $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$

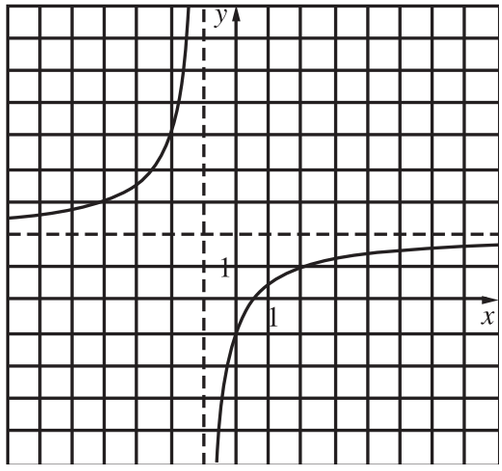
(Koska $f(x) \to 1$, kun $x \to \infty$ tai $x \to -\infty$, niin kulkukaavion perusteella maksimiarvo $f(-3) = \frac{3}{2}$ on suurin arvo ja minimiarvo $f(1) = -\frac{1}{2}$ on pienin arvo.)

117. a) 2

b) Aidosti kasvava väleillä $]-\infty, -1[$ ja $]-1, \infty[$. Funktiolla ei ole ääriarvoja.

(Derivaattafunktio $f'(x) = \dfrac{3}{(x+1)^2}$ on positiivinen funktion koko määrittelyjoukossa $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.)

c)

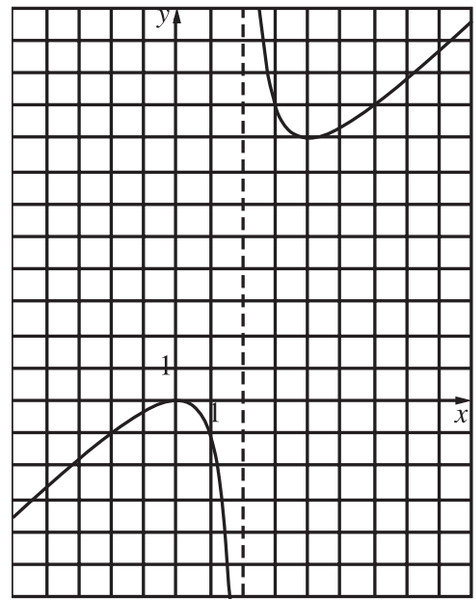


Kuvaajalla on vaakasuora asymptootti $y = 2$ ja pystysuora asymptootti $x = -1$.

118. a) aidosti kasvava väleillä $]-\infty, 0]$ ja $[4, \infty[$, aidosti vähenevä väleillä $[0, 2[$ ja $]2, 4]$

b) Maksimiarvo 0 kohdassa 0, minimiarvo 8 kohdassa 4. Funktiolla f ei ole suurinta eikä pienintä arvoa.

c)



Suora $x = 2$ on pystysuora asymptootti. Vaakasuoraa asymptoottia ei ole.

119. a) $\frac{5}{7}$ $\left(\dfrac{5x}{\sqrt{9x^2+x}+4x} = \dfrac{5}{\sqrt{9+\frac{1}{x}}+4}\right)$

b) $\frac{1}{6}$ $\left(\sqrt{9x^2+x} - 3x = \dfrac{x}{\sqrt{9x^2+x}+3x}\right)$

120. Kun $m < n$, niin $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \to 0$, kun $x \to \infty$ tai $x \to -\infty$.

Kun $m = n$, niin $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \to \dfrac{a_m}{b_n}$, kun $x \to \infty$ tai $x \to -\infty$.

Kun $m > n$, niin raja-arvoa ei ole. Funktio suurenee tai pienenee rajatta riippuen potenssin x^{m-n} eksponentin parillisuudesta/parittomuudesta ja suhteen $\dfrac{a_m}{b_n}$ merkistä.

121. $\dfrac{x^2-5}{x+3} - (x-3) = \dfrac{4}{x+3} \to 0$, kun $x \to \infty$ tai $x \to -\infty$.

Epäyhtälö toteutuu, kun $x < -40\,003$ tai $x > 39\,997$.

(Epäyhtälö $\left|\dfrac{4}{x+3}\right| < 10^{-4}$ on yhtäpitävä epäyhtälön $4 < 10^{-4}\,|x+3|$ eli epäyhtälön $|x+3| > 40\,000$ kanssa.)

122. $\sqrt{x^2+1} - x = \dfrac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} \to 0$, kun $x \to \infty$, sillä

$\sqrt{x^2+1} + x \to \infty$.

Luvuksi h kelpaa luku $h = 1\,000$.

(Koska $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = x$ kaikilla $x > 0$, niin $\sqrt{x^2+1} - x > 0$ kaikilla $x > 0$. Tulee olla $\sqrt{x^2+1} - x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} < \dfrac{1}{1000}$ eli $\sqrt{x^2+1} + x > 1\,000$. Epäyhtälö toteutuu, kun $x > 1000$, sillä tällöin on

$\sqrt{x^2+1} + x > x > 1\,000$.

Tehtävässä riittää siis löytää ja perustella *jokin* luku h, joka täyttää vaaditun ehdon.)

123. $f(x) = \dfrac{5}{9x-3}$,

$f'(x) = -\dfrac{45}{(9x-3)^2} = -\dfrac{5}{(3x-1)^2}$,

$\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{5}{9}\ln\frac{5}{2}$

($\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{2t+1}{3t-1} = \dfrac{2}{3}$, joten

$f(x) = \dfrac{2x+1}{3x-1} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{9x-3}$.

$\displaystyle\int_1^2 \frac{5}{9x-3}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{9}\int_1^2 \frac{9}{9x-3}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{9}\Big/_1^2 \ln(9x-3)$.)

Käänteisfunktio

124. a) $f^{-1}(8) = 4$, $f^{-1}(4) = 3$, $f^{-1}(1) = 2$, $f^{-1}(-1) = 1$, $f^{-1}(-2) = 0$ ja $f^{-1}(-3) = -2$

b) $f^{-1}(f(3)) = 3$ ja $f^{-1}(f(-1)) = -1$

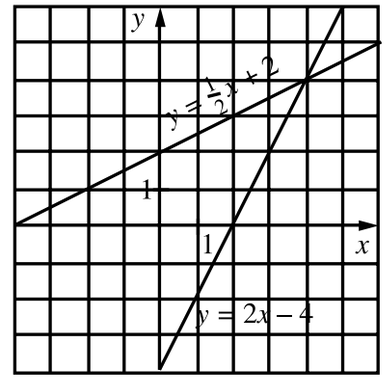
c) $f(f^{-1}(1)) = 1$ ja $f(f^{-1}(6)) = 6$

125. a) Funktio f on kaikkialla aidosti kasvava, joten sillä on käänteisfunktio. Käänteisfunktion määrittelyjoukko on $\mathbb{R}$.

(Funktio f saa kaikki reaaliarvot eli funktion f arvojoukko on $\mathbb{R}$.)

b) $f^{-1}(y) = \dfrac{1}{2}y + 2$ (Ratkaistaan x yhtälöstä $2x - 4 = y$.)

c)



(Funktioiden $f(x) = 2x - 4$ ja $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}x + 2$ kuvaajat ovat toistensa peilikuvia suoran $y = x$ suhteen.)

126. a) $\sqrt{x}$, määrittelyjoukko $[0, \infty[$

b) $-\sqrt{x}$, määrittelyjoukko $[0, \infty[$

c) $\log_3 x$, määrittelyjoukko $]0, \infty[$

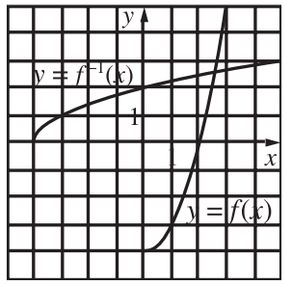
d) 10^x, määrittelyjoukko $\mathbb{R}$

127. a) Funktio $f(x) = x^2 - 4$ on aidosti kasvava, kun $x \geqslant 0$, joten funktiolla on käänteisfunktio. Käänteisfunktion määrittelyjoukko on $[-4, \infty[$. (Käänteisfunktion määrittelyjoukko on funktion f arvojoukko.)

b) $f^{-1}(y) = \sqrt{y+4}$, missä $y \geqslant -4$

(Yhtälöstä $x^2 - 4 = y$ saadaan $x = \sqrt{y+4}$ tai $x = -\sqrt{y+4}$. Koska $x \geqslant 0$, niin $x = \sqrt{y+4}$.)

c)



($f^{-1}(x) = \sqrt{x+4}$, missä $x \geqslant -4$)

128. Koska $f'(x) = e^{-x} > 0$ kaikilla x, funktio f on kaikkialla aidosti kasvava. Siis funktiolla f on käänteisfunktio. Käänteisfunktion määrittelyjoukko on $]-\infty, 6[$.

$f^{-1}(x) = -\ln(6 - x)$.

(Koska $f(x) \to -\infty$, kun $x \to -\infty$, ja $f(x) \to 6$, kun $x \to \infty$, niin funktion f arvojoukko (käänteisfunktion määrittelyjoukko) on $]-\infty, 6[$.

Käänteisfunktion lauseke $f^{-1}(y)$ saadaan ratkaisemalla x yhtälöstä $6 - e^{-x} = y$.)

129. $f^{-1}(x) = \dfrac{3x+2}{x-1}$, määrittelyväli $]1, \infty[$;

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{\dfrac{3(x+2)}{x-3} + 2}{\dfrac{x+2}{x-3} - 1} = \frac{\dfrac{5x}{x-3}}{\dfrac{5}{x-3}} = x,$$

kun $x > 3$

(Koska $f'(x) = -\dfrac{5}{(x-3)^2} < 0$, kun $x > 3$, funktio $f :]3, \infty[\to \mathbb{R}$ on aidosti vähenevä, joten sillä on käänteisfunktio. Koska $f(x) \to \infty$, kun $x \to 3+$ (tämän voi perustella kuvaajalla),

ja $f(x) = \dfrac{x+2}{x-3} = \dfrac{1 + \frac{2}{x}}{1 - \frac{3}{x}} \to 1$, kun $x \to \infty$, niin funktion f arvojoukko on $]1, \infty[$.

Siis käänteisfunktion määrittelyväli on $]1, \infty[$.

Käänteisfunktion lauseke $f^{-1}(y)$ saadaan ratkaisemalla x yhtälöstä $\dfrac{x+2}{x-3} = y$.)

130. a) Koska $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0$ kaikilla x, funktio f on kaikkialla aidosti kasvava. Siis funktiolla f on käänteisfunktio. Käänteisfunktion määrittelyjoukko on $\mathbb{R}$.

(Koska $f(x) \to -\infty$, kun $x \to -\infty$, ja $f(x) \to \infty$, kun $x \to \infty$, funktion f arvojoukko (käänteisfunktion määrittelyjoukko) on $\mathbb{R}$.)

b) $f^{-1}(4) = 1$ ja $f^{-1}(-2) = -1$, nollakohta 1

(Huomataan, että $f(1) = 4$ ja $f(-1) = -2$. Koska $f(0) = 1$, $f^{-1}(1) = 0$.)

c) $f^{-1}(0) \approx -0{,}64$ (Määritetään haarukoimalla x_0 niin, että $f(x_0) = 0$.)

131. a) $\dfrac{\pi}{2}$ b) 0 c) $\dfrac{\pi}{4}$

132. a) $-\dfrac{\pi}{2}$ b) π c) $-\dfrac{\pi}{4}$

133. a) $-\dfrac{\pi}{6}$ b) $\dfrac{\pi}{3}$ c) $\dfrac{2\pi}{3}$

134. a) $-\arccos x$ b) $2\pi - \arccos x$

(Yhtälön $\cos y = x$ ratkaisu y, joka kuuluu annetulle välille.)

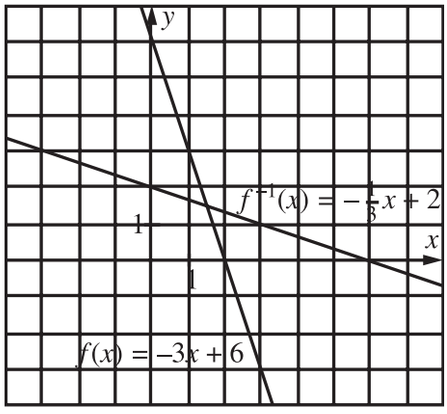
135. Funktio f on kaikkialla aidosti vähenevä, ja funktion f arvojoukko on $\mathbb{R}$, joten funktiolla f on kaikkialla määritelty käänteisfunktio.

$f^{-1}(x) = -\frac{1}{3}x + 2$

$f(f^{-1}(x)) = -3 \cdot (-\frac{1}{3}x + 2) + 6 = x - 6 + 6 = x$

ja

$f^{-1}(f(x)) = -\frac{1}{3}(-3x + 6) + 2 = x - 2 + 2 = x$



136. $f'(x) = \frac{2}{x-1} > 0$ kaikilla $x > 1$, joten funktio f on aidosti kasvava. Siis funktiolla f on käänteisfunktio. Käänteisfunktion määrittelyjoukko on $\mathbb{R}$ ja lauseke $f^{-1}(x) = e^{\frac{x}{2}} + 1$.

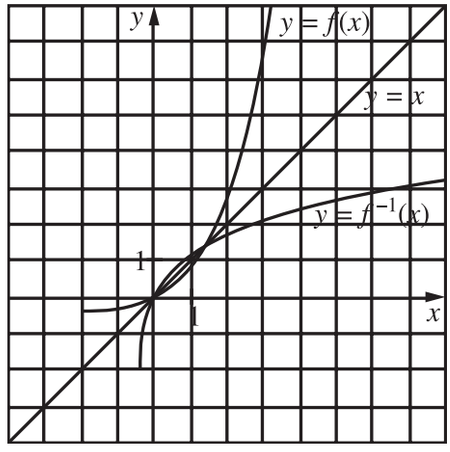
137. Funktion f derivaattafunktio on $f'(x) = 1 - \sin x$. Koska $\sin x \leqslant 1$ kaikilla x, niin $f'(x) \geqslant 0$ kaikilla x, ja $f'(x) = 0$ vain erillisissä kohdissa $x = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$, n kokonaisluku. Siis funktio f on kaikkialla aidosti kasvava. Koska $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ kaikilla x, niin $f(x) \to -\infty$, kun $x \to -\infty$, ja $f(x) \to \infty$, kun $x \to \infty$. Siis käänteisfunktion määrittelyjoukko on $\mathbb{R}$.

$f^{-1}(1) = 0$, $f^{-1}(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$, $f^{-1}(\pi - 1) = \pi$ ja

$f^{-1}(2) \approx 2{,}99$.

138. Funktiolla $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$ ei ole nollakohtia ja $f'(x)$:n kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joten $f'(x) > 0$ kaikilla x. Siis funktio f on kaikkialla aidosti kasvava, joten sillä on käänteisfunktio. Koska $f(x) \to -\infty$, kun $x \to -\infty$, ja $f(x) \to \infty$, kun $x \to \infty$, käänteisfunktion määrittelyjoukko on $\mathbb{R}$.
$f^{-1}(3) = 1$ ja $f^{-1}(8) = 2$.
Käänteisfunktio saa arvon 10 kohdassa 912.

139. $A = [-2, \infty[$, käänteisfunktion määrittelyjoukko on $[-\frac{1}{e}, \infty[$, leikkauspisteet ovat $(0, 0)$ ja $(\ln 4, \ln 4)$.
(Funktion f ja sen käänteisfunktion kuvaajien leikkauspisteet saadaan yhtälöllä $f(x) = x$. Käänteisfunktion kuvaaja on funktion f kuvaajan peilikuva suoran $y = x$ suhteen.)



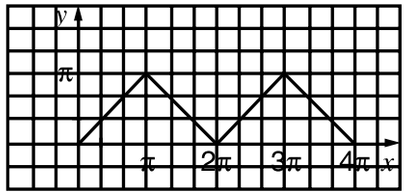
140. a) 0 b) $\frac{\pi}{2}$ c) 0

141. a) $-\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{5\pi}{6}$ c) $-\frac{\pi}{4}$

142. a) $\pi - \arcsin x$
b) $\arcsin x + 2\pi$

143. a) x b) $\pi - x$ c) $x - 2\pi$

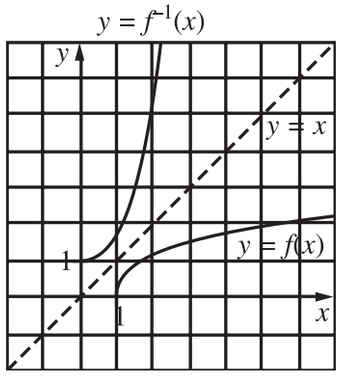
144.
$$\arccos(\cos x) = \begin{cases} x, & \text{kun } 0 \leqslant x < \pi \\ 2\pi - x, & \text{kun } \pi \leqslant x < 2\pi \\ x - 2\pi, & \text{kun } 2\pi \leqslant x < 3\pi \\ 4\pi - x, & \text{kun } 3\pi \leqslant x \leqslant 4\pi \end{cases}$$



145. a) $f(e-1) = 1$ ja $f(1) = 0$

(Koska $x + f(x) = e^{f(x)}$, niin $x = e^{f(x)} - f(x)$ kaikilla $x \geqslant 0$. Olkoon $g(y) = e^y - y$. Koska $g(f(x)) = x$ kaikilla $x \geqslant 0$, niin funktiot f ja g ovat toistensa käänteisfunktioita edellyttäen, että funktiolla g on käänteisfunktio. Koska $g'(y) = e^y - 1 > 0$, kun $y > 0$, funktio g on aidosti kasvava välillä $[0, \infty[$. Funktion $g : [0, \infty[\to \mathbb{R}$, $g(y) = e^y - y$, arvojoukko on $[1, \infty[$. Siis funktiolla g on käänteisfunktio ja tämä käänteisfunktio on f. Koska $g(1) = e - 1$ ja $g(0) = 1$, niin $f(e-1) = 1$ ja $f(1) = 0$.)

b) Funktion f kuvaaja on käänteisfunktion $f^{-1} : [0, \infty[\to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = e^x - x$, kuvaajan peilikuva suoran $y = x$ suhteen.



Käänteisfunktion derivaatta

146. Koska funktion $f(x) = x^3$ derivaattafunktio on $f'(x) = 3x^2$, niin käänteisfunktion $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ derivaattafunktio on

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{3f^{-1}(x)^2} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2},$$

missä $x \neq 0$.

147. $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0$ kaikilla x, joten funktiolla f on käänteisfunktio.

$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{9}$, $(f^{-1})'(1) = 1$ ja

$(f^{-1})'(-2) = \frac{1}{9}$.

Käänteisfunktio on derivoituva koko määrittelyjoukossaan, sillä derivaattafunktiolla $f'(x)$ ei ole nollakohtia.

(Huomataan, että $f(1) = 4$, joten $f^{-1}(4) = 1$. Siis $(f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'(1)}$. Edelleen huomataan, että $f(0) = 1$ ja $f(-1) = -2$.)

148. $f'(x) = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x^2 + 2x + 1) = 3(x+1)^2$, joten $f'(x) \geqslant 0$ kaikilla x ja $f'(x) = 0$ vain kohdassa $x = -1$. Siis funktio f on kaikkialla aidosti kasvava ja sillä on käänteisfunktio. Käänteisfunktion määrittelyjoukko on $\mathbb{R}$, sillä $f(x) \to -\infty$, kun $x \to -\infty$, ja $f(x) \to \infty$, kun $x \to \infty$.

$f^{-1}(-2) = 0$ ja $(f^{-1})'(-2) = \frac{1}{3}$,

$f^{-1}(5) = 1$ ja $(f^{-1})'(5) = \frac{1}{12}$.

Käänteisfunktio ei ole derivoituva kohdassa -3.

(Huomataan, että $f(0) = -2$, joten $f^{-1}(-2) = 0$ ja $(f^{-1})'(-2) = \frac{1}{f'(0)}$. Vastaavasti huomataan, että $f(1) = 5$. Käänteisfunktio ei ole derivoituva kohdassa -3, sillä $f^{-1}(-3)$ on derivaatan f' nollakohta -1.)

149. a) Koska $\cos x \geqslant -1$ kaikilla x, niin $f'(x) = 1 + \cos x \geqslant 0$ kaikilla x. Lisäksi $f'(x) = 0$ vain erillisissä pisteissä $x = \pi + n \cdot 2\pi$, n kokonaisluku.
Siis funktio f on kaikkialla aidosti kasvava.

b) $(f^{-1})'(\frac{3\pi - 2}{2}) = 1$ (Huomataan, että

$$f(\frac{3\pi}{2}) = \frac{3\pi}{2} + \sin\frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} - 1 = \frac{3\pi - 2}{2}.$$

Siis $f^{-1}(\frac{3\pi - 2}{2}) = \frac{3\pi}{2}$ ja

$$(f^{-1})'(\frac{3\pi - 2}{2}) = \frac{1}{f'\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = \frac{1}{1 + 0} = 1.)$$

150. Funktio $\arctan x$ on funktion

$f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \tan x$, käänteisfunktio.

Koska $f'(x) = 1 + \tan^2 x$, niin funktion $f^{-1}(x) = \arctan x$ derivaattafunktio on

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{1 + \tan^2 f^{-1}(x)}$$

$$= \frac{1}{1 + (\tan(\arctan x))^2} = \frac{1}{1 + x^2}, \text{ sillä}$$

$\tan(\arctan x) = x$.

151. a) määrittelyjoukko $[-3, 3]$, derivaattafunktio $-\frac{1}{\sqrt{9 - x^2}}$, missä $-3 < x < 3$

b) määrittelyjoukko $\mathbb{R}$, derivaattafunktio $\frac{5}{1 + 25x^2}$

c) määrittelyjoukko $[0, 2]$, derivaattafunktio $-\frac{1}{\sqrt{2x - x^2}}$, missä $0 < x < 2$

152. $D(x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2))$

$$= \arctan x + x \cdot \frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{1 + x^2}$$

153. suurin arvo $\frac{\pi}{2} - \ln 2 \approx 0{,}88$, pienintä arvoa ei ole (Funktion f määrittelyjoukko on $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{2}{1 + x^2} - \frac{2x}{1 + x^2} = \frac{2 - 2x}{1 + x^2}.$$

Kulkukaavion mukaan funktio f saa suurimman arvon kohdassa $x = 1$ ja pienintä arvoa ei ole.)

154. Koska funktion $f(x) = x^4$ derivaattafunktio on $f'(x) = 4x^3$, niin käänteisfunktion $f^{-1}(x) = \sqrt[4]{x}$ derivaattafunktio on $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{4(\sqrt[4]{x})^3}$,

missä $x > 0$.

155. $f'(x) = 1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} = \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2} = \frac{(x - 3)^2}{x^2}$,

mistä nähdään, että f on aidosti kasvava.

$(f^{-1})'(-8) = \frac{1}{4}$.

156. Koska $f'(x) = \frac{x^4 + 3x^2 + 2x}{(x^2 + 1)^2} > 0$, kun $x > 0$, funktio f on aidosti kasvava välillä $]0, \infty[$, joten funktiolla f on käänteisfunktio f^{-1}.

Koska $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = -1$ ja $f(x) = \frac{x - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} \to \infty$,

kun $x \to \infty$, käänteisfunktion määrittelyjoukko on $]-1, \infty[$.

$(f^{-1})'(0) = \frac{2}{3}$.

(Huomataan, että $f(1) = 0$, joten $f^{-1}(0) = 1$.)

157. $f'(x) = (-x^2 + 2x - 1)e^{-x} = -(x - 1)^2 e^{-x}$, joten $f'(x) \leqslant 0$ kaikilla x ja $f'(x) = 0$ vain kohdassa $x = 1$. Siis funktio f on kaikkialla aidosti vähenevä ja sillä on käänteisfunktio.
$(f^{-1})'(1) = -1$.
Käänteisfunktio ei ole derivoituva kohdassa $2e^{-1}$.
(Käänteisfunktiolla ei ole derivaattaa kohdassa $f(1)$, missä $x = 1$ on derivaattafunktion $f'(x)$ nollakohta.)

158. Koska $\cos x \leqslant 1$, niin $f'(x) = 1 - \cos x \geqslant 0$ kaikilla x. Lisäksi $f'(x) = 0$ vain erillisissä kohdissa $n \cdot 2\pi = 2n\pi$, missä n on kokonaisluku. Siis f on kaikkialla aidosti kasvava, joten sillä on käänteisfunktio.
Käänteisfunktion määrittelyjoukko on $\mathbb{R}$.
$(f^{-1})'((2n + 1)\pi + 1) = \frac{1}{2}$ jokaisella kokonaisluvulla n.
Käänteisfunktio ei ole derivoituva kohdissa $2n\pi + 1$, n kokonaisluku.

159. Funktio $\arccos x$ on funktion $f\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$, käänteisfunktio. Koska $f'(x) = -\sin x$, niin funktion $f^{-1}(x) = \arccos x$ derivaattafunktio on

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = -\frac{1}{\sin(\arccos x)}.$$

Koska funktion $\arccos x$ arvot ovat välillä $[0, \pi]$ ja tällä välillä $\sin x \geqslant 0$, niin

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - (\cos(\arccos x))^2} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Siis $\mathrm{D}\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, kun $-1 < x < 1$.

160. arvo $\frac{5\pi}{12}$, derivaatta $-\frac{4}{\sqrt{3}} - 1$

161. $\mathrm{D}(x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2})$

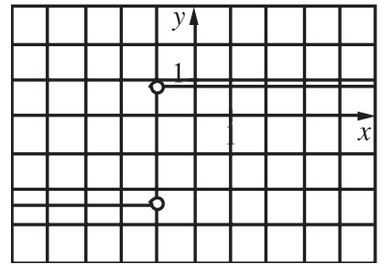
$$= \arcsin x + x \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)$$

162. $\sqrt{3} + \frac{\pi}{6}$

163. määrittelyjoukko $]0, 1]$, pienin arvo $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$

($f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{1}{x}$. Derivaattafunktion nollakohta saadaan yhtälöstä $\sqrt{1 - x^2} = x$, joka on funktion f määrittelyjoukossa yhtäpitävä neliöön korotetun yhtälön kanssa. Derivaattafunktion nollakohta on $\frac{1}{\sqrt{2}}$.)

164. $f'(x) = 0$ kaikilla $x \neq -1$,
$f(-2) \approx -2{,}36$ ja $f(2) \approx 0{,}79$



$$\left(f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} + \frac{1}{1 + \left(\frac{1 - x}{1 + x}\right)^2} \cdot \mathrm{D}\frac{1 - x}{1 + x}\right.$$

$$= \frac{1}{1 + x^2} + \frac{(1 + x)^2}{(1 + x)^2 + (1 - x)^2} \cdot \frac{-2}{(1 + x)^2}$$

$$= \frac{1}{1 + x^2} - \frac{2}{2(1 + x^2)} = 0.$$

Integraalilaskennan peruslauseen nojalla funktio f on vakiofunktio molemmilla väleillä $]-\infty, -1[$ ja $]-1, \infty[$.)

Integraalifunktio ja määrätty integraali

165. $g'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} - \frac{1}{1 + x^2} = f(x)$ kaikilla x, joten g on f:n integraalifunktio.
Kaikki integraalifunktiot ovat $\ln(x^2 + 1) - \arctan x + C$, C vakio.

166.

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + C & , \text{kun } x < 1 \\ \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6} + C, & \text{kun } x \geqslant 1 \end{cases}$$

(Kaikki integraalifunktiot ovat muotoa

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + C, & \text{kun } x < 1 \\ \frac{1}{3}x^3 + D, & \text{kun } x \geqslant 1. \end{cases}$$

Funktio F on jatkuva kohdassa $x = 1$, kun $\frac{1}{2} + C = \frac{1}{3} + D$.)

167.
$$F(x) = \begin{cases} x - 1 \text{ , kun } x < 1 \\ x^2 - x, \text{ kun } x \geqslant 1 \end{cases}$$

(Funktion F kaikki integraalifunktiot ovat muotoa

$$F(x) = \begin{cases} x + C \text{ , kun } x < 1 \\ x^2 - x + 1 + C, \text{ kun } x \geqslant 1. \end{cases}$$

168.
$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2} \text{ , kun } x < 1 \\ \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{5}{2} \text{ , kun } x \geqslant 1 \end{cases}$$

169.
$$F(x) = \begin{cases} e^x - 1 \text{ , kun } x < 0 \\ -e^{-x} + 1, \text{ kun } x \geqslant 0 \end{cases}$$

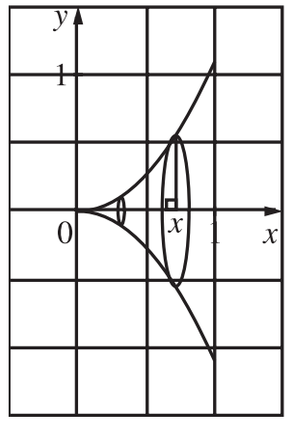
170. $\frac{5}{3}$ $\left(\int_0^1 (x^2 - 2x + 1)\mathrm{d}x + \int_1^2 (x^2 - 1)\mathrm{d}x\right.$.

Koska määrätty integraali voidaan laskea paloittain, määrätyn integraalin laskemiseen ei tarvita funktion $x^2 - x + |x - 1|$ integraalifunktiota.)

171. a) $f'(x) = (x^2 + 1)^3$ b) $g'(x) = e^{-x^2}$

172. 2 ja 3 $(f'(x) = x^2 - 5x + 6)$

173. $f(x) = \sqrt{\frac{5}{\pi}}x^2$



(Tulee olla

$\pi \int_0^x f(t)^2\,\mathrm{d}t = x^5$ eli $\int_0^x f(t)^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}x^5$ kaikilla x välillä [0, 1]. Tämä pätee silloin, kun funktioiden $\int_0^x f(t)^2\,\mathrm{d}t$ ja $\frac{1}{\pi}x^5$ derivaattafunktiot ovat samat eli $f(x)^2 = \frac{5}{\pi}x^4$.)

174. a) $f'(x) = -\sqrt{1 + x^4}$

b) $g'(x) = 3\sqrt{1 + 81x^4}$

c) $h'(x) = 3\sqrt{1 + 81x^4} - \sqrt{1 + x^4}$

175. $-\ln 3$ ja 0
$(f'(x) = 9xe^{3x} - xe^x = xe^x(9e^{2x} - 1))$

176. $A = -4$ ja $B = -3$
$\left(g'(x) = \frac{-Ax + B}{\sqrt{1 - x^2}}\right)$

177.
$$F(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + \frac{4}{3} - \frac{1}{3}e^3 \text{ , kun } x < 0 \\ \frac{1}{3}e^{3x} + x + 1 - \frac{1}{3}e^3, \text{ kun } x \geqslant 0 \end{cases}$$

178.
$$F(x) = \begin{cases} -\ln(3 - x) \text{ , kun } x < 0 \\ \ln(3 + x) - 2\ln 3, \text{ kun } x \geqslant 0 \end{cases}$$

179. $-\frac{2}{3}$ (Integraali voidaan laskea kahdessa osassa määrittämättä funktion f integraalifunktiota.)

180. a) $f'(x) = \frac{e^x}{x}$ b) $g'(x) = \frac{\sin x}{x}$

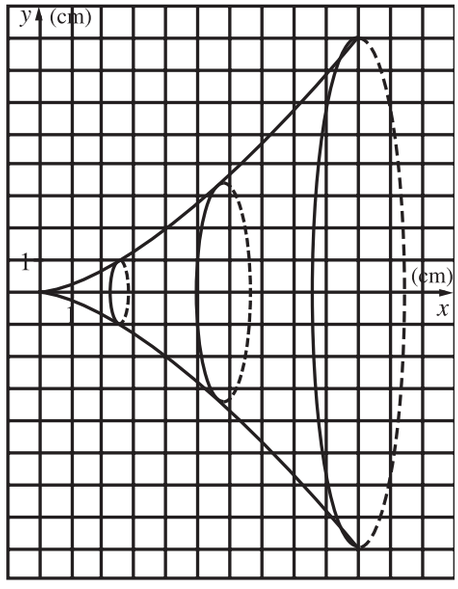
181. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{5\pi}}\, x\sqrt{x}$

(Jos x (cm) on vesikerroksen korkeus, niin nesteen määrä (cm^3) on kx^4, missä k on verrannollisuuskerroin.

Koska $k \cdot 10^4 = 500$, niin $k = \frac{1}{20}$.

Siis kaikilla $0 \leqslant x \leqslant 10$ on

$\pi \int_0^x f(t)^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{20}x^4$ eli $\int_0^x f(t)^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{20\pi}x^4$.)



182. a) $f'(x) = -x^2e^x$

b) $g'(x) = 27x^2e^{3x}$

c) $h'(x) = 27x^2e^{3x} - x^2e^x$

183. $f'(x) = 3\sqrt{9x^2+1} - \sqrt{x^2+1}$.

Funktiolla f ei ole ääriarvoja.

(Huomataan, että $9x^2 \geqslant x^2$ kaikilla x, joten $f'(x) > 0$ kaikilla x.)

184. $a = \sqrt[4]{\frac{1}{14}}$ ja $a = -\sqrt[4]{\frac{1}{14}}$

(Oletetaan ensin, että $a \geqslant 0$.

Tällöin pinta-ala on $A(a) = \int_a^{2a} \frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$.

Kulkukaaviosta nähdään, että funktio $A(a)$ saa suurimman arvon derivaattafunktion

$A'(a) = \frac{1 - 14a^4}{(1+16a^4)(1+a^4)}$

nollakohdassa $a = \sqrt[4]{\frac{1}{14}}$.

Koska käyrä $y = \frac{1}{1+x^4}$ on symmetrinen y-akselin suhteen, pinta-ala saa saman suurimman arvon y-akselin suhteen symmetrisesti sijaitsevassa alueessa.)

185. Funktion $A(a) = \int_a^{a^2} \frac{1}{x \ln x}\,\mathrm{d}x$ derivaattafunktio $A'(a) = \frac{1}{a^2 \ln a^2} \cdot 2a - \frac{1}{a \ln a}$ on vakiofunktio 0, joten integraalilaskennan peruslauseen nojalla $A(a)$ on vakiofunktio välillä $]1, \infty[$. Voidaan myös integroida:

$\int_a^{a^2} \frac{1}{x \ln x}\,\mathrm{d}x = \Big/_a^{a^2} \ln(\ln x)$. Tällöin nähdään, että vakioarvo on $\ln 2$.

186. Määrittelyjoukko on $]1, \infty[$. Funktio g on määritelty välillä $]1, \infty[$, ja

$g'(x) = f(x) + xf'(x) - f'(x^2) \cdot 2x$

$= f(x) + x \cdot \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{\ln x^2} \cdot 2x = \ldots$.

187. a) $f(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$

(Jos muuttujan a funktioilla $\int_0^{2a} f(x)\,dx$ ja $e^a - 1$ on sama derivaattafunktio, niin integraalilaskennan peruslauseen nojalla ne ovat sama funktio, sillä funktiot saavat saman arvon kohdassa $a = 0$. Derivoimalla a:n suhteen saadaan $2f(2a) = e^a$, joten $f(2a) = \frac{1}{2}e^a$ ja $f(a) = f(2 \cdot \frac{a}{2})$.)

b) $f(x) = 2x - 3$

188. Kun $x \neq 0$, niin $f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$. Kun $x \to 0$, niin $2x \sin\frac{1}{x} \to 0$, sillä $|\sin\frac{1}{x}| \leqslant 1$. Koska jokaisella välillä $]0, a[$ on lukuja, jotka ovat muotoa $\frac{1}{2n\pi}$, n kokonaisluku, niin funktio $\cos\frac{1}{x}$ saa jokaisella välillä $]0, a[$ arvon 1. Siis funktiolla $\cos\frac{1}{x}$ ja siten myöskään funktiolla $f'(x)$ ei ole kohdassa 0 raja-arvoa 0.

Epäoleellinen integraali

189. a) Suppenee, arvo on $\frac{1}{3}$.

$$\left(\int_1^s \frac{1}{x^4}\,dx = \int_1^s x^{-4}\,dx = -\frac{1}{3}\Big/_1^s \frac{1}{x^3}\right)$$

b) Suppenee, arvo on 2.

$$\left(\int_1^s \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx = \int_1^s x^{-\frac{3}{2}}\,dx = -2\Big/_1^s \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

c) Hajaantuu. $\left(\int_1^s \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\Big/_1^s \sqrt{x}\right)$

190. a) Hajaantuu. $\left(\int_s^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \Big/_s^1 -\frac{1}{x}\right)$

b) Hajaantuu. $\left(\int_s^1 \frac{1}{x}\,dx = \Big/_s^1 \ln|x|\right)$

c) Suppenee, arvo on $\frac{3}{2}$.

$$\left(\int_s^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \int_s^1 x^{-\frac{1}{3}}\,dx = \frac{3}{2}\Big/_s^1 x^{\frac{2}{3}}\right.$$

$$\left. = \frac{3}{2}\Big/_s^1 (\sqrt[3]{x})^2\right)$$

191. a) Hajaantuu. b) $\frac{1}{2}e^2$ c) Hajaantuu.

192. 2 $\left(\int_{-\infty}^0 e^x\,dx + \int_0^\infty e^{-x}\,dx\right)$

193. a) Raja-arvoa ei ole, vaan pinta-ala $A(a)$ suurenee rajatta.

b) π $\left(V(a) = \pi\int_1^a \frac{1}{x^2}\,dx = \pi(1 - \frac{1}{a})\right)$

194. $2\ln 3 - \ln 2 = \ln\frac{9}{2}$ $\left(\ln\frac{3}{2} - \ln\frac{1}{3}\right)$

$$\left(\int_1^s \left(\frac{3}{3x-2} - \frac{2}{2x+1}\right)dx\right.$$

$$= \Big/_1^s (\ln|3x-2| - \ln|2x+1|)$$

$$\left. = \Big/_1^s \ln\left|\frac{3x-2}{2x+1}\right|\right)$$

195. 0

$\left(\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx = -\frac{1}{2}\right.$ ja

$\int_{0}^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}$;

$\left.\int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+1} + C\right)$

196. 0

197. 1 $\left(\int_{0}^{s} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx\right.$

$= \left(s - \sqrt{s^2+1}\,\right) - (-1) = -\frac{1}{s+\sqrt{s^2+1}} + 1\Big)$

198. a) 0 b) Ei suppene.

199. a) Hajaantuu. b) $\frac{1}{2}$

200. a) Hajaantuu. b) $\frac{4}{3}$

201. $\frac{1}{2}$ (Tilavuus välillä $0 \leqslant x \leqslant a$ on

$\pi \int_{0}^{a} (e^{-\pi x})^2\,dx = -\frac{1}{2} \int_{0}^{a} -2\pi e^{-2\pi x}\,dx.\Big)$

202. a) π b) π

203. a) 0 $(\cos(-x) = \cos x)$ b) Ei.

204. a) $\frac{2}{\pi}$ $\left(\int_{0}^{s} e^{-x}\sin(\pi e^{-x})\,dx = \frac{1}{\pi}\Big/_{0}^{s} \cos(\pi e^{-x})\right)$

b) $\ln 2$ $\left(\int_{0}^{s} \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}\,dx = -\Big/_{0}^{s} \ln(e^{-x}+1)\right)$

205. $\frac{1}{2}\ln 3$

$\left(\int_{1}^{s} \left(\frac{3x}{3x^2-1} - \frac{x}{x^2+1}\right)dx\right.$

$= \Big/_{1}^{s} \left(\frac{1}{2}\ln|3x^2-1| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1|\right)$

$= \frac{1}{2}\Big/_{1}^{s} \ln\frac{3x^2-1}{x^2+1}\Big)$

206. $\frac{1}{2}$

207. $\frac{16}{15}$

(Epäyhtälö $x^4 \leqslant \frac{1}{x^4}$ toteutuu, kun $x^8 \leqslant 1$ ja $x \neq 0$ eli kun $-1 \leqslant x \leqslant 1$ ja $x \neq 0$.

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^4}\,dx + \int_{-1}^{1} x^4\,dx + \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^4}\,dx.\Big)$

208. pinta-ala $4(1 - \sqrt{1-a^2}\,)$, raja-arvo 4
(Alue on symmetrinen molempien koordinaattiakselien suhteen. Koska $y^2 = \frac{x^2}{1-x^2}$, niin tulee olla $\frac{x^2}{1-x^2} \geqslant 0$, mikä toteutuu, kun $-1 < x < 1$. Alueen ensimmäisessä neljänneksessä olevaa osaa rajaa yläpuolelta funktion $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ kuvaaja, joten osan pinta-ala on

$\int_{0}^{a} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.\Big)$

209. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-t|}\,dx = \int_{-\infty}^{t} e^{x-t}\,dx + \int_{t}^{\infty} e^{-x+t}\,dx$ suppenee kohti lukua 2 kaikilla t. Siis funktio f on määritelty kaikkialla ja $f(t) = 2$ kaikilla t.

210.

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} - \frac{1}{2} & , \text{kun } 0 < t < 1 \\ \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} & , \text{kun } t \geqslant 1, \end{cases}$$

pienin arvo $\frac{1}{4}$

(Koska $\frac{1}{tx^2} - \frac{1}{x^3} = \frac{x-t}{tx^3}$ ja $t > 0$, niin

$f(t) = \int_1^\infty (\frac{1}{tx^2} - \frac{1}{x^3})\mathrm{d}x$, kun $0 < t < 1$, ja

$f(t) = \int_1^t (-\frac{1}{tx^2} + \frac{1}{x^3})\mathrm{d}x + \int_t^\infty (\frac{1}{tx^2} - \frac{1}{x^3})\mathrm{d}x$,

kun $t \geqslant 1$.
Funktio f on jatkuva kohdassa 1, ja
$f'(t) < 0$ väleillä $]0, 1[$ ja $]1, 2[$, ja
$f'(t) > 0$ välillä $]2, \infty[$.)

211. Olkoot c ja d kaksi lukua. Tällöin

$$\int_s^d f(x)\,\mathrm{d}x = \int_s^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Jos $\lim_{s \to -\infty} \int_s^c f(x)\,\mathrm{d}x$ on olemassa, niin myös

$\lim_{s \to -\infty} \int_s^d f(x)\,\mathrm{d}x$

$= \lim_{s \to -\infty} \int_s^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$ on olemassa ja

$\int_{-\infty}^d f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$. Vastaavasti

$\int_d^s f(x)\,\mathrm{d}x = \int_d^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^s f(x)\,\mathrm{d}x$, joten jos

$\int_c^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ suppenee, niin myös $\int_d^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$

suppenee ja $\int_d^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_d^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^\infty f(x)\,\mathrm{d}x.$

Siis jos molemmat integraalit $\int_{-\infty}^c f(x)\,\mathrm{d}x$ ja

$\int_c^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ suppenevat, niin myös molemmat

integraalit $\int_{-\infty}^d f(x)\,\mathrm{d}x$ ja $\int_d^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ suppenevat

ja $\int_{-\infty}^d f(x)\,\mathrm{d}x + \int_d^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$

$= \int_{-\infty}^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^\infty f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x + \int_d^c f(x)\,\mathrm{d}x$

$= \int_{-\infty}^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^\infty f(x)\,\mathrm{d}x.$

Jatkuvat todennäköisyysjakaumat

212. a) $f(x) \geqslant 0$ kaikilla x ja $\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 1$,

joten f on tiheysfunktio.

$\mathrm{P}(0{,}25 \leqslant X \leqslant 0{,}5) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \approx 0{,}21$

$(\int_{0{,}25}^{0{,}5} \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x)$

b) $\frac{1}{3}$ $(\int_0^1 x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{2}\,\mathrm{d}x)$

213. $a = 2$, $\mathrm{P}(X \leqslant 1) = 1 - \frac{1}{e^2} \approx 0{,}86$

$(\int_0^\infty ae^{-2x}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{2}$, joten tulee olla $a = 2$.

$\mathrm{P}(X \leqslant 1) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.)$

214. a) $f(x) \geqslant 0$ kaikilla x, ja

$\int_1^e \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \Big/_1^e \ln|x| = \ln e - \ln 1 = 1$

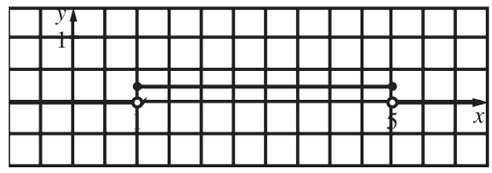
b) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 1 \\ \ln x, & \text{kun } 1 \leqslant x \leqslant e \\ 1, & \text{kun } x > e, \end{cases}$

$\mathrm{P}(X \leqslant 2{,}3) = F(2{,}3) \approx 0{,}83,$
$\mathrm{P}(X \geqslant 2{,}3) = 1 - F(2{,}3) \approx 0{,}17,$
$\mathrm{P}(1{,}7 \leqslant X \leqslant 2{,}3) = F(2{,}3) - F(1{,}7) \approx 0{,}30$

(Välillä $1 \leqslant x \leqslant e$ kertymäfunktio on $\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$)

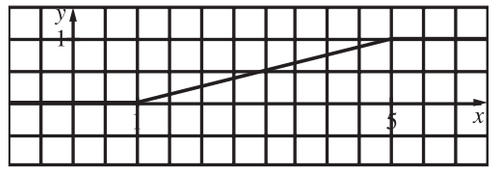
215. a) $c = \frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(X \leqslant 2) = \frac{1}{4}$ ja

$\mathrm{P}(1{,}5 \leqslant X \leqslant 3{,}5) = \frac{1}{2}$



(Tiheysfunktion alla oleva pinta-ala on $4c$, joten tulee olla $4c = 1$. Todennäköisyydet voidaan laskea geometrisesti ilman integrointia.)

b) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 1 \\ \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}, & \text{kun } 1 \leqslant x \leqslant 5 \\ 1, & \text{kun } x > 5 \end{cases}$



c) $\mathrm{E}(X) = 3$ ja $\mathrm{D}(X) = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1{,}15$

$(\mathrm{E}(X) = \int_1^5 \frac{1}{4}x\,\mathrm{d}x$ ja

$\mathrm{D}^2(X) = \int_1^5 \frac{1}{4}(x-3)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{12}\Big/_1^5 (x-3)^3)$

216. a)
$$F(x) = \begin{cases} 0\,, \text{kun } x < 0 \\ x^3, \text{kun } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1\,, \text{kun } x > 1 \end{cases}$$

(Kun $0 \leqslant x \leqslant 1$, niin $P(X \leqslant x)$ on x-säteisen pallon tilavuuden suhde 1-säteisen pallon tilavuuteen.)

b)
$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad, \text{kun } x < 0 \\ 3x^2, \text{kun } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \quad, \text{kun } x > 1 \end{cases}$$

(Tiheysfunktion arvoja kohdissa 0 ja 1 ei ole saatu derivoimalla.)

c) 0,75 m

217. Kertymäfunktio on
$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \text{kun } x < 0 \\ \frac{x}{5} - \frac{x^2}{100} & , \text{kun } 0 \leqslant x \leqslant 10 \\ 1 & , \text{kun } x > 10, \end{cases}$$
tiheysfunktio
$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{kun } x < 0 \\ \frac{1}{5} - \frac{x}{50} & , \text{kun } 0 \leqslant x \leqslant 10 \\ 0 & , \text{kun } x > 10, \end{cases}$$
odotusarvo $\frac{10}{3}$ cm $\approx 3{,}33$ cm ja

keskihajonta $\frac{5\sqrt{2}}{3}$ cm $\approx 2{,}36$ cm.

(Kun $0 \leqslant x \leqslant 10$, niin tikan etäisyys reunasta on pienempi tai yhtä suuri kun x, jos osuma on renkaassa, joka saadaan poistamalla tikkataulusta ympyrä, jonka säde on $10 - x$. Siis $F(x) = P(\underline{x} \leqslant x)$ on renkaan pinta-alan

$\pi \cdot 10^2 - \pi \cdot (10 - x)^2$ suhde koko taulun pinta-alaan $\pi \cdot 10^2$. Tiheysfunktion arvoja $f(0)$ ja $f(10)$ ei ole saatu derivoimalla.

Odotusarvo on $E(\underline{x}) = \int_0^{10} x(\frac{1}{5} - \frac{x}{50})\mathrm{d}x$ ja

keskihajonnan neliö (varianssi)

$D^2(\underline{x}) = \int_0^{10} (x - \frac{10}{3})^2 (\frac{1}{5} - \frac{x}{50})\mathrm{d}x$.)

218. a) $\frac{3}{4}$ ($P(X \leqslant 9) = P(Z^2 \leqslant 9) = P(Z \leqslant 3)$, missä $P(Z \leqslant 3)$ on välin $[0, 3]$ pituuden suhde välin $[0, 4]$ pituuteen.)

b)
$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad, \text{kun } x < 0 \\ \frac{\sqrt{x}}{4}, \text{kun } 0 \leqslant x \leqslant 16 \\ 1 \quad, \text{kun } x > 16 \end{cases}$$

(Kun $0 \leqslant x \leqslant 16$, niin $P(X \leqslant x)$ on välin $[0, \sqrt{x}\,]$ pituuden suhde välin $[0, 4]$ pituuteen.)

c)
$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad, \text{kun } x \leqslant 0 \\ \frac{1}{8\sqrt{x}}, \text{kun } 0 < x \leqslant 16 \\ 0 \quad, \text{kun } x > 16 \end{cases}$$

(Tiheysfunktion arvoja kohdissa 0 ja 16 ei ole saatu derivoimalla.)

d) $\frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$

219. a) $f(x) \geqslant 0$ kaikilla x ja $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1$, joten f on tiheysfunktio.

$P(4 \leqslant X \leqslant 5) = 0{,}05$. $(\int_4^5 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x)$

b) Odotusarvoa ei ole olemassa.

$(\int_1^\infty x \cdot \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ hajaantuu.)

220. $a = 1$, $P(X \geqslant 3) = \frac{5}{9} \approx 0{,}56$

221. a) $a = \frac{1}{2}$

b)
$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \text{kun } x < 1 \\ \sqrt{x} - 1, & \text{kun } 1 \leqslant x \leqslant 4 \\ 1 & , \text{kun } x > 4 \end{cases}$$

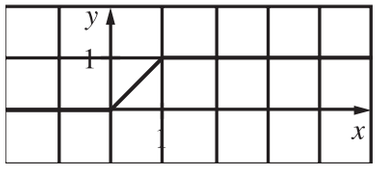
$P(X < 2) = F(2) = \sqrt{2} - 1 \approx 0{,}41$

$P(2 \leqslant X \leqslant 3) = F(3) - F(2) = \sqrt{3} - \sqrt{2} \approx 0{,}32$

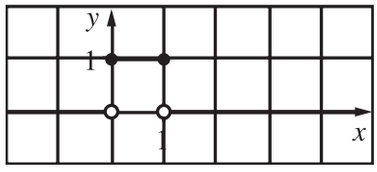
c) $\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$

222. a) $\frac{1}{4}$ (välin $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ pituuden suhde välin $[-1, 1]$ pituuteen)

b)
$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{kun } x < 0 \\ x, \text{kun } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1, \text{kun } x > 1 \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{kun } x < 0 \\ 1, \text{kun } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0, \text{kun } x > 1 \end{cases}$$



(Jos $0 \leqslant x \leqslant 1$, niin $F(x)$ on välin $[-x, x]$ pituuden suhde välin $[-1, 1]$ pituuteen. Tiheysfunktion arvoja kohdissa 0 ja 1 ei saada derivoimalla. Jakauma on niin sanottu tasainen jakauma (tehtävä 215).)

c) $E(X) = \frac{1}{2}$, $D(X) = \sqrt{\frac{1}{12}} \approx 0{,}29$

223. a)
$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \text{kun } x < 0 \\ 1 - \frac{1}{4}(2 - x)^2, & \text{kun } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1 & , \text{kun } x > 2, \end{cases}$$

$P(0{,}3 \leqslant X \leqslant 1{,}4) = F(1{,}4) - F(0{,}3) \approx 0{,}63$

(Kun $0 \leqslant x \leqslant 2$, niin etäisyys tiestä on suurempi kuin x km, jos eläin on koko kolmion kanssa yhdenmuotoisessa kolmiossa, jonka korkeus on $2 - x$. Koska yhdenmuotoisten kolmioiden pinta-alojen suhde on korkeuksien suhteen neliö,

niin $P(X > x) = \frac{(2-x)^2}{2^2}$ ja

$F(x) = P(X \leqslant x) = 1 - P(X > x)$.)

b)
$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{kun } x < 0 \\ \frac{1}{2}(2 - x), & \text{kun } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 & , \text{kun } x > 2 \end{cases}$$

(Tiheysfunktion arvoja $f(0)$ ja $f(2)$ ei ole saatu derivoimalla.)

c) 0,67 km $\left(\int_0^2 x \cdot \frac{1}{2}(2 - x)\,dx \right)$

224. $a = \frac{1}{e}$, $P(2 \leqslant X \leqslant 3) = \frac{1}{e} - \frac{1}{e^2} \approx 0{,}23$,

$E(X) = 2$

$(e^{-x+2} = e^2 e^{-x})$

225. a)
$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ kun } x \leqslant 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x^3}, \text{ kun } x > 1 \end{cases}$$

(Välillä $]0, 1[$ olevan luvun kuutiojuuri on myös välillä $]0, 1[$ ja kuutiojuuren käänteisluku siis välillä $]1, \infty[$. Kun $x > 1$, niin

$$F(x) = \mathrm{P}(X \leqslant x) = \mathrm{P}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{Z}} \leqslant x\right) = \mathrm{P}\left(Z \geqslant \frac{1}{x^3}\right),$$

missä $\mathrm{P}(Z \geqslant \frac{1}{x^3})$ on välin $]\frac{1}{x^3}, 1[$ pituuden suhde välin $]0, 1[$ pituuteen.)

b)
$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ kun } x \leqslant 1 \\ \dfrac{3}{x^4}, \text{ kun } x > 1 \end{cases}$$

(Arvoa $f(0) = 0$ ei ole saatu derivoimalla.)

c) $\mathrm{E}(X) = \frac{3}{2}$ d) $\mathrm{D}(X) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

226. $\frac{2}{\pi}$ (Jos satunnaismuuttuja X on kateetin AC pituus, niin satunnaismuuttujan X kertymäfunktio on

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ kun } x < 0 \\ \dfrac{2 \arcsin x}{\pi}, \text{ kun } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1, \text{ kun } x > 1. \end{cases}$$

227.
$$F(z) = \begin{cases} 0, \text{ kun } z < 0 \\ 2z - z^2, \text{ kun } 0 \leqslant z \leqslant 1 \\ 1, \text{ kun } z > 1, \end{cases}$$

$\mathrm{E}(Z) = \frac{1}{3}$

(Lukujen x ja y etäisyys on $|y - x|$. Lukujen x ja y arpominen vastaa pisteen arpomista neliöstä $0 \leqslant x \leqslant 1$ ja $0 \leqslant y \leqslant 1$. Jos $0 \leqslant z \leqslant 1$, niin epäyhtälö $|y - x| \leqslant z$ toteutuu, kun $-z \leqslant y - x \leqslant z$ eli kun $x - z \leqslant y \leqslant x + z$. $\mathrm{P}(Z \leqslant z)$ on suorien $y = x - z$ ja $y = x + z$ väliin jäävän osan pinta-alan suhde koko neliön pinta-alaan.)

228.
$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ kun } x \leqslant 0 \\ -\ln x, \text{ kun } 0 < x \leqslant 1 \\ 0, \text{ kun } x > 1, \end{cases}$$

$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{4}$

Lukujonon raja-arvo

229. a) Suppenee. Raja-arvo on 2.
b) Suppenee. Raja-arvo on 0.
c) Hajaantuu.
d) Hajaantuu.
e) Suppenee. Raja-arvo on 0.

230. a) Jono hajaantuu. $\left(a_n = \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n\right)$

b) $\frac{7}{4}$ $\left(b_n = \frac{7}{4} - \frac{5}{4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$

231. a) 5 $\left(a_n = 5 - \frac{3}{n} + \frac{7}{n^2}\right)$

b) Jono hajaantuu. $\left(b_n = 6n + \frac{4}{n} - \frac{11}{n^2}\right)$

232. a) $-\frac{3}{2}$ b) 0

c) Jono hajaantuu. (Jonon jäsenet pienenevät rajatta.)

233. raja-arvo 3, arvosta 12 997 lähtien

234. a) Voidaan tutkia erotusta $a_n - 2$. Koska

$$a_n - 2 = -\frac{1}{n+3} < 0 \text{ kaikilla } n = 1, 2, 3, \ldots,$$

niin $a_n < 2$. Voidaan myös huomata suoraan, että $a_n = \frac{2n+5}{n+3} < \frac{2n+6}{n+3} = 2$.

b) $a_{n+1} - a_n$

$$= \frac{2(n+1)+5}{(n+1)+3} - \frac{2n+5}{n+3} = \frac{1}{(n+4)(n+3)}.$$

Koska $n + 4 > 0$ ja $n + 3 > 0$ kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$, niin $a_{n+1} - a_n > 0$.
Siis $a_{n+1} > a_n$.
c) 2

235. a) esimerkiksi jonot $a_n = 3 - \frac{1}{n}$ ja $b_n = 3 - 0{,}5^n$

b) esimerkiksi jonot $a_n = 3 + \frac{1}{n}$ ja $b_n = 3 + 0{,}5^n$

c) esimerkiksi jonot $a_n = 3 + (-1)^n \frac{1}{n}$ ja $b_n = 3 + (-0{,}5)^n$

236. a) $\frac{1}{8}$ $\left(a_n = \left(\frac{5n^2 + 2}{10n^2 + n}\right)^3\right)$

b) -1 $\left(a_n = \sin\left(\frac{3\pi + \frac{2}{n}}{2 + \frac{1}{n}}\right)\right)$

237. a) 3 $\left(a_n = \sqrt{9 + \frac{4}{n^2}}\right)$

b) 0 $\left(b_n = \frac{5}{\sqrt{n + \frac{1}{n^2}}}\right)$

238. a) Jono hajaantuu. (Jonon jäsenet suurenevat rajatta.)

b) $\frac{5}{2}$

239. a) $|\cos n| \leqslant 1$, joten $0 \leqslant |a_n| \leqslant \frac{1}{n^2}$.

Koska $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} = 0$, niin myös $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

b) Koska $|\sin 3n| \leqslant 1$, niin $0 \leqslant |a_n| \leqslant 4 \cdot 0{,}7^n$. Koska $\lim\limits_{n \to \infty} 0{,}7^n = 0$, niin myös $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

240. a) $\sqrt[3]{5}$ (yhtälön $a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{5}{a^2}\right)$ juuri)

241. a) 0 b) Ei raja-arvoa. c) 1

242. a) 0 b) $\frac{3}{2}$

243. a) $\frac{2}{5}$ b) 0

c) Jono hajaantuu.

244. a) 3 $\left(a_n = \frac{3n}{n+3}\right)$

b) 4 $\left(a_n = \frac{4n^2 + n}{n^2 + 1}\right)$

245. arvosta 612 lähtien (Ratkaistaan epäyhtälö $\left(\frac{88}{89}\right)^n < 0{,}001$ logaritmin avulla.)

246. raja-arvo $\frac{1}{2}$, n:n arvosta 174 998 alkaen

247. a) $a_n - 3 = \frac{4}{n+1} > 0$ kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Voidaan myös arvioida suoraan:

$a_n = \frac{3n+7}{n+1} > \frac{3n+3}{n+1} = 3$.

b) $a_{n+1} - a_n = -\frac{4}{(n+2)(n+1)} < 0$ kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$, sillä $n + 2 > 0$ ja $n + 1 > 0$. Siis $a_{n+1} < a_n$ kaikilla n, eli jono on aidosti vähenevä.

Toinen tapa on tutkia funktiota

$f :]-1, \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3x+7}{x+1}$.

Koska $f'(x) = -\frac{4}{(x+1)^2} < 0$ kaikilla x, niin funktio f on aidosti vähenevä. Siis $f(1) > f(2) > f(3) > \ldots$, eli jono (a_n) on aidosti vähenevä.

c) 3

248. a) $\frac{1}{32}$ b) $\frac{1}{2}$

249. a) $\sqrt{3}$ b) $\frac{1}{3}$

250. a) 0 b) $\ln 3$

251. 3

252. a) Ei pidä paikkaansa. Vastaesimerkkejä ovat esimerkiksi lukujonot $a_n = \frac{1}{n}$ ja $a_n = 0{,}9^n$.

b) Pitää paikkansa. Jos raja-arvo a olisi pienempi kuin 0, niin jokaisen jonon jäsenen etäisyys raja-arvosta olisi suurempi kuin $|a|$, mikä raja-arvon määritelmän perusteella on mahdotonta.

c) Ei pidä paikkaansa. Vastaesimerkkejä ovat esimerkiksi lukujonot $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ ja $a_n = 1 + 0{,}9^n$.

253. a) 0 $\left(0 \leqslant |a_n| \leqslant \frac{2}{n} \text{ ja } \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0\right)$

b) 0 $\left(0 \leqslant |a_n| \leqslant \frac{1}{2^n} \text{ ja } \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0\right)$

254. $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$

255. Jos jono suppenisi kohti raja-arvoa a, niin olisi $a = a^2 + \frac{1}{2}$. Yhtälöä ei toteuta mikään luku, joten jono hajaantuu.

256. a) $b_2 = 1$ ja $b_n = 1 + \frac{1}{b_{n-1}}$, kun $n \geqslant 3$

$\left(\frac{a_n}{a_{n-1}} = 1 + \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}\right)$

b) lukua $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (Yhtälön $b = 1 + \frac{1}{b}$ positiivinen juuri. Luku on ns. kultaisen leikkauksen suhde: kun jana jaetaan osiin niin, että koko janan pituuden suhde pitemmän osan pituuteen on yhtä suuri kuin pitemmän osan pituuden suhde lyhyempään osaan, niin suhde on $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.)

257. a) $a_n = \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n < \frac{1}{n+1}$ kaikilla n.

Koska $0 < a_n < \frac{1}{n+1}$ ja $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$,

niin $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

b) $a_n = \left(\frac{100}{n}\right)^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n$, kun $n > 200$.

Koska $0 < a_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n$, kun $n > 200$, ja

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, niin $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

258. a) $\ln 3$ (funktion 3^x derivaatta kohdassa 0)
b) 1 (funktion $\ln x$ derivaatta kohdassa 1)

259. Neperin luku e

a) e^2 $\left((1 + \frac{1}{n})^{2n} = ((1 + \frac{1}{n})^n)^2\right)$

b) $\frac{1}{e}$ $\left((\frac{n}{n+1})^n = ((1 + \frac{1}{n})^n)^{-1}\right)$

c) $e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$ d) $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$

260. Oletetaan, että $0 < q < 1$ ja että $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q$, kun $n \geqslant n_1$. Tällöin

$$a_{n_1+p} = \frac{a_{n_1+p}}{a_{n_1+p-1}} \cdot \frac{a_{n_1+p-1}}{a_{n_1+p-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n_1+1}}{a_{n_1}} \cdot a_{n_1}$$

$$\leqslant q^p \, a_{n_1}, \text{ joten}$$

$$0 \leqslant a_n \leqslant q^{n-n_1} \, a_{n_1} = q^n \frac{a_{n_1}}{q^{n_1}}, \text{ kun } n \geqslant n_1.$$

Koska $\lim\limits_{n\to\infty} q^n \frac{a_{n_1}}{q^{n_1}} = 0$, niin $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

a) Esimerkiksi voidaan arvioida

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{n+1} \leqslant \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, kun $n \geqslant 5$.

b) Esimerkiksi voidaan arvioida

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{3n} \leqslant \frac{2n}{3n} = \frac{2}{3}$, kun $n \geqslant 1$.

c) Esimerkiksi $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{8}{9}$, kun $n \geqslant 3$.

261. Oletetaan ensin, että $0 < q < 1$. Suhde $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{q(n+1)}{n}$. Tällöin $0 < \frac{1+q}{2} < 1$.

Ratkaisemalla epäyhtälö $\frac{q(n+1)}{n} \leqslant \frac{1+q}{2}$

nähdään, että $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{1+q}{2}$, kun $n \geqslant \frac{2q}{1-q}$.

Kun $q = 0$, kaikki jonon jäsenet ovat nollia.
Kun $-1 < q < 0$, väite seuraa siitä, että jäsenten itseisarvojen jono suppenee kohti nollaa.

262. a) Ei pidä paikkaansa. Esimerkiksi jono $a_n = (-1)^n$ on rajoitettu jono, joka ei suppene.

b) Pitää paikkansa. Jos $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$, niin on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku n_1, että $|a_n - a| < 1$, kun $n \geqslant n_1$, eli $a - 1 < a_n < a + 1$, kun $n \geqslant n_1$.
Ylärajaksi M kelpaa mikä tahansa luku, joka on suurempi kuin äärellisen lukujoukon $a + 1,\ a_1,\ a_2, \ldots, a_{n_1 - 1}$ suurin luku.

Alarajaksi m kelpaa mikä tahansa luku, joka on pienempi kuin äärellisen lukujoukon $a - 1,\ a_1,\ a_2, \ldots, a_{n_1 - 1}$ pienin luku.

c) Pitää paikkansa, sillä jos jono suppenisi, niin b-kohdan nojalla se olisi rajoitettu.

Sarja

263. 1, 0, 1, 0, ... Sarja hajaantuu.

264. a) Hajaantuu. ($S_1 = \frac{1}{2}$, $S_3 = 1$, $S_6 = 1\frac{1}{2}$ jne. Sarjalla on mitä tahansa positiivista lukua suurempia osasummia.)

b) Suppenee. Summa on 1. ($S_n = 1$, kun n on pariton, ja $S_n = 1 - \frac{1}{n}$, kun n on parillinen.)

265. $a_n = \frac{n}{2n+1}$, sarja ei suppene.

($\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \frac{1}{2} \neq 0$)

266. $S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$, sarjan summa on $\frac{1}{2}$.

($S_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$,

$S_2 = (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$,

$S_3 = (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{5}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{5}$

jne.)

267. Sarjan $\frac{1}{100} + \frac{1}{200} + \ldots$ n. osasumma

$\frac{1}{100} + \frac{1}{200} + \ldots + \frac{1}{n \cdot 100} = \frac{1}{100} S_n$,

missä S_n on harmonisen sarjan n. osasumma.
Koska $S_n \to \infty$, kun $n \to \infty$, niin

$\frac{1}{100} S_n \to \infty$, kun $n \to \infty$.

268. Kuvion mukaan

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} < \int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln n$, joten

$S_n < 1 + \ln n$.

a) 13,82:n ja 14,82:n välissä
b) 20,72:n ja 21,72:n välissä

269. a) $S_{16} > 3$ b) $S_{32} > 3\frac{1}{2}$

c) $S_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$ d) $S_{1048576} > 11$

270. 1, −2, 3, −4, 5, ... Hajaantuu.

271. Suppenee. Summa on 1.

($S_n = 1$, kun n on pariton, ja $S_n = \frac{n}{n+1}$, kun n on parillinen.)

272. $S_n = \lg(n+1)$, sarja hajaantuu.

273. Ei suppene, sillä termien raja-arvo on $\frac{2}{3} \neq 0$.

($a_n = \frac{2n-1}{3n+1}$)

274. Ei suppene, sillä termeillä ei ole raja-arvoa.

275. a) Hajaantuu. $\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} = \sqrt{2}-\sqrt{1}\right.$,

$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$ jne.

Sarjan n. osasumma on $\sqrt{n+1}-1$.)

b) Suppenee. Sarjan summa on $1+\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(Kirjoittamalla osasumma auki nähdään, että n. osasumma on $1+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+2}}$.)

276. $a_k = \frac{1}{k(k+2)}$. Koska

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{k(k+2)}$, niin

$a_k = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$. Sarjan summa on $\frac{3}{4}$.

(Sarjan n. osasumma on

$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$.)

277. a) Kuvion avulla nähdään, että sarjan n. osasumma S_n on suurempi kuin funktion $\frac{1}{\sqrt{x}}$ kuvaajan välillä $[1, n+1]$ rajaaman alueen pinta-ala $\int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2(\sqrt{n+1}-1)$. Koska $S_n > 2(\sqrt{n+1}-1)$ ja $2(\sqrt{n+1}-1) \to \infty$, kun $n \to \infty$, niin $S_n \to \infty$, kun $n \to \infty$.

b) $2(\sqrt{n+1}-1) < S_n < 2\sqrt{n}-1$, lukujen 1 998 ja 1 999 välissä

278. Kuvion avulla nähdään epäyhtälö $\int_{n+1}^{2n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x < a_n < \int_n^{2n} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$, joka sievenee osoitettavaksi epäyhtälöksi. Koska $\lim_{n\to\infty}(\ln(2n+1)-\ln(n+1)) = \ln 2$, niin $\lim_{n\to\infty} a_n = \ln 2$.

279. a) Sarjan kaikki termit ovat positiivisia ja

$S_n < 1 + \int_1^n \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x < 1 + \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 2$

kaikilla n.

b) Sarjan kaikki termit ovat positiivisia ja

$S_n < 1 + \int_1^n \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x < 1 + \int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = 1 + \frac{1}{p-1}$

kaikilla n.

280. noin 29

Geometrinen sarja

281. a) Suppenee, summa on $\frac{21}{5}$.

b) Suppenee, summa on 2.

c) Suppenee, summa on $\frac{7}{3}$.

d) Ei suppene.

282. a) $106\frac{2}{3}$ (Sarja suppenee, sillä $q = \frac{1}{4}$ toteuttaa suppenemisehdon $-1 < q < 1$.)

b) 64 (Sarja suppenee, sillä $q = -\frac{1}{4}$ toteuttaa suppenemisehdon $-1 < q < 1$.)

283. a) $\frac{5}{2}$ $\left(a = 2 \text{ ja } q = \frac{1}{5}\right)$

b) $\frac{1}{8}$ $\left(a = \frac{1}{10} \text{ ja } q = \frac{1}{5}\right)$

c) $\frac{25}{26}$ $\left(a = 1 \text{ ja } q = -\frac{1}{25}\right)$

284. a) Ei millään. b) $-\frac{9}{10}$

285. $\frac{2}{3}$ metriä

286. a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{3}$

287. Kun $-\sqrt{2} < x < 0$ tai $0 < x < \sqrt{2}$.

Summa on $\frac{1}{x^2}$.

(Sarja suppenee, kun $-1 < 1 - x^2 < 1$ eli kun $x^2 < 2$ ja $x^2 > 0$.)

288. Suppenee, kun $x < -\frac{1}{2}$. Summa on $-x$.

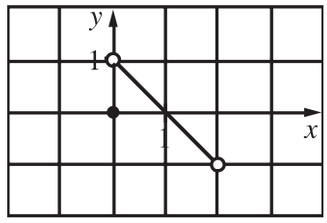
(Sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^n = 1 + \frac{x+1}{x} + \left(\frac{x+1}{x}\right)^2 + \ldots$$

on määritelty, kun $x \neq 0$. Suppenemisehto $\left|\frac{x+1}{x}\right| < 1$ on yhtäpitävä epäyhtälön $|x+1| < |x|$ kanssa. Koska epäyhtälön molemmat puolet ovat epänegatiiviset, epäyhtälö säilyy yhtäpitävänä, kun molemmat puolet korotetaan potenssiin kaksi.)

289. Määritelty, kun $0 \leqslant x < 2$,

$$S(x) = \begin{cases} 0 & , \text{kun } x = 0 \\ 1 - x, & \text{kun } 0 < x < 2. \end{cases}$$



(Funktio $S(x)$ on määritelty, kun sarja suppenee. Kun $x = 0$, sarja on $0 + 0 + 0 + \ldots$. Siis sarja suppenee, kun $x = 0$, ja $S(0) = 0$. Kun $x \neq 0$, sarja on geometrinen sarja, jossa $q = 1 - x$. Sarja suppenee, kun $-1 < 1 - x < 1$ eli kun $0 < x < 2$, jolloin

$S(x) = \frac{x(1-x)}{1-(1-x)} = 1 - x$.)

290. määrittelyjoukko $\mathbb{R}$,

suurin arvo 6 kohdissa $x = \frac{3\pi}{2} + n \cdot 2\pi$,

n kokonaisluku,

pienin arvo $\frac{6}{11}$ kohdissa $x = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$,

n kokonaisluku

($\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{5}{6}\right)^n \sin^n x = 1 - \frac{5}{6} \sin x +$

$\left(-\frac{5}{6}\right)^2 \sin^2 x - \ldots$ on geometrinen sarja, jossa

$q = -\frac{5}{6} \sin x$. Koska $|\sin x| \leqslant 1$, niin

$\left|-\frac{5}{6} \sin x\right| \leqslant \frac{5}{6} < 1$ kaikilla x, joten sarja suppenee kaikilla muuttujan x arvoilla.

Sarjan summa on $f(x) = \frac{1}{1 + \frac{5}{6}\sin x}$.

Koska osoittaja ja nimittäjä ovat positiivisia, funktion f arvo on suurin, kun nimittäjä on pienin, ja pienin, kun nimittäjä on suurin. Kohdissa, joissa $\sin x = -1$, funktio saa

suurimman arvon $\frac{1}{1 + \frac{5}{6} \cdot (-1)} = 6$, ja

kohdissa, joissa $\sin x = 1$,

pienimmän arvon $\frac{1}{1 + \frac{5}{6} \cdot 1} = \frac{6}{11}$.)

291. a) $\frac{17}{99}$

b) $\frac{2}{37}$ $(54 \cdot \frac{1}{1000} + 54 \cdot \frac{1}{1000^2} + \ldots)$

c) 1 $(9 \cdot \frac{1}{10} + 9 \cdot \frac{1}{10^2} + \ldots)$

292. 20 (Muodostuu jono keskenään yhdenmuotoisia suorakulmaisia kolmioita, joissa kulkureitin osat ovat hypotenuusina. Kaksi peräkkäistä kolmiota ovat yhdenmuotoisia suhteessa $\frac{3}{4}$. Kulkureitin pituus on geometrisen sarjan

$5 + 5 \cdot \frac{3}{4} + 5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \ldots$ summa.)

293. $\frac{250}{31}$

(Olkoon sarja $a + aq + aq^2 + \ldots$, missä $|q| < 1$. Tällöin $|q^2| < 1$ ja $|q^3| < 1$, joten termien neliöiden ja kuutioiden muodostamat geometriset sarjat suppenevat. Yhtälöparista $\frac{a}{1-q} = \frac{5}{2}$ ja $\frac{a^2}{1-q^2} = \frac{25}{6}$ saadaan $a = 2$ ja $q = \frac{1}{5}$, jolloin $\frac{a^3}{1-q^3} = \frac{250}{31}$.)

294. a) 320 b) $45\frac{5}{7}$

295. a) 3

b) $\frac{27}{19}$ $\left(q = \frac{8}{27}\right)$

c) $\frac{27}{35}$ $\left(q = -\frac{8}{27}\right)$

296. a) Ei millään. b) $q = \frac{1}{4}$

297. $x = -1 + \sqrt{2}$

(Sarja suppenee, kun $-1 < x < 1$.)

298. a) A b) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}p = (\sqrt{2}+1)p$

299. a) $\frac{36}{91} \approx 0{,}396$

b) $\frac{30}{91} \approx 0{,}330$

c) $\frac{25}{91} \approx 0{,}275$

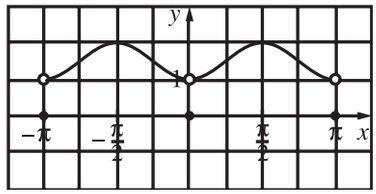
300. Suppenee, kun $x \neq n\pi$, missä n on kokonaisluku, summa on $\frac{1}{\sin^2 x}$.

301. Suppenee, kun $x < -4$ tai $x > -2$.

$S(x) = \frac{x+3}{x+2}$, missä $x < -4$ tai $x > -2$.

302. Sarja suppenee kaikilla muuttujan x arvoilla.

$$S(x) = \begin{cases} 0 & , \text{kun } x = n\pi,\ n \text{ kokonaisluku} \\ 2 - \cos^2 x & , \text{kun } x \neq n\pi,\ n \text{ kokonaisluku} \end{cases}$$



(Koska $2 - \cos^2 x \geqslant 2 - 1 = 1$, sarja on määritelty kaikilla muuttujan arvoilla.
Kun $\sin^2 x = 0$, sarja on $0 + 0 + 0 + \ldots$.
Siis kun $x = n\pi$, n kokonaisluku, sarja suppenee ja $S(x) = 0$.
Kun $x \neq n\pi$, sarja on geometrinen sarja, jossa $q = \frac{1}{2 - \cos^2 x}$. Suppenemisehto $-1 < \frac{1}{2-\cos^2 x} < 1$ toteutuu, kun $\cos^2 x < 1$ eli kun $x \neq n\pi$, n kokonaisluku.)

303. pistettä $5\frac{2}{5}$

(Janojen a_1a_2, a_2a_3, a_3a_4, ... pituudet muodostavat geometrisen jonon $9,\ \frac{2}{3}\cdot 9,\ \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 9, \ldots$ ja vastaavasti pisteet $a_2,\ a_3,\ a_4, \ldots$ jonon $9,\ 9 - \frac{2}{3}\cdot 9,\ 9 - \frac{2}{3}\cdot 9 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 9, \ldots$.)

304. $\frac{1}{2-\sqrt{3}}a = (2+\sqrt{3})a$

305. 6

(Yhtälöstä $\frac{3q}{1-q^2} = 2$ saadaan $q = \frac{1}{2}$.)

306. $32 + 16 + 8 + \ldots$ tai $96 - 48 + 24 - \ldots$

(Koska $\frac{a(1-q^6)}{1-q} = 63$ ja $\frac{a}{1-q} = 64$, niin $64(1 - q^6) = 63$, mistä saadaan $q = \frac{1}{2}$ tai $q = -\frac{1}{2}$.)

307. $R_n = \dfrac{aq^n}{1-q}$, a) arvosta 88 b) arvosta 60

308. $I(k) = \dfrac{4}{3}\left(1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^k\right)$, $\lim\limits_{k\to\infty} I(k) = \dfrac{4}{3}$

(Olkoon $A_n = \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x$

$= 2^{-n} \bigg/\!\!\!\!\int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} -\cos x.$

$A_n = 2^{-n}\cdot 2$, kun n on parillinen, ja

$A_n = 2^{-n}\cdot(-2)$, kun n on pariton, joten

$A_n = (-1)^n\,2^{-n+1}$ kaikilla n. Siis

$I(k) = A_0 + A_1 + \ldots + A_{k-1}$

$= 2 - 1 + \ldots + (-1)^{k-1}\dfrac{1}{2^{k-2}}$

$= \dfrac{2\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right)}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{4}{3}\left(1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^k\right) \to \dfrac{4}{3}$,

kun $k \to \infty$.)

309. Akilles varmasti saavuttaa kilpikonnan.

Matka $\dfrac{1000}{9}$ metriä, jonka Akilles tällöin on juossut, saadaan ratkaisemalla s yhtälöstä

$\dfrac{s}{10v} = \dfrac{s-100}{v}$.

Paradoksin jälkimmäinen muotoilu kuvaa saman matkan geometrisen sarjan
$100 + 10 + 1 + \ldots$ summana.
Paradoksaalisuuden tuntu syntyy siitä, että jälkimmäisessä muotoilussa äärellinen matka on jaettu äärettömän moneen osaan, mikä antiikin kreikkalaisten mielestä – niin kuin myös monien matemaatikkojen mielestä vielä 2000 vuotta myöhemmin – oli järjenvastaista.

310. a) $S_n(x) = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$,

missä $x \neq 1$.
$(1 + 2x + \ldots + nx^{n-1} = \mathrm{D}(1 + x + x^2 + \ldots + x^n))$

b) Tehtävän 261 nojalla $\lim\limits_{n\to\infty} nx^n = 0$, kun $-1 < x < 1$. Koska $nx^{n+1} = nx^n \cdot x$ ja $(n+1)x^n = nx^n + x^n$, niin myös $\lim\limits_{n\to\infty} nx^{n+1} = 0$ ja $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)x^n = 0$, kun $-1 < x < 1$.
Siis sarja suppenee, kun $-1 < x < 1$, ja sarjan summa on $\dfrac{1}{(1-x)^2}$.

c) $\dfrac{25}{16}$ ja $\dfrac{25}{36}$

d) 6

$(\mathrm{E}(X) = \dfrac{1}{6}\cdot 1 + \dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{1}{6}\cdot 2 + \left(\dfrac{5}{6}\right)^2\cdot\dfrac{1}{6}\cdot 3 + \ldots)$

311. a) $P_n = 3\cdot 4^{n-1}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} = 3\cdot\left(\dfrac{4}{3}\right)^{n-1}$,

$P_{10} \approx 40{,}0$ ja $P_{50} \approx 3\,973\,007$,
jono (P_n) hajaantuu.
(Jokaisessa vaiheessa sivujen määrä nelinkertaistuu, ja kuvion K_n sivujen pituus on $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$.)

b) $\dfrac{8}{5}A_1 = \dfrac{2\sqrt{3}}{5}$

(Kun $n \geqslant 2$, niin

$A_n = A_{n-1} + 3\cdot 4^{n-2}\cdot\left(\dfrac{1}{9}\right)^{n-1}A_1$

$= A_{n-1} + \dfrac{3}{4}\cdot\left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1}A_1$, sillä kun piirretään K_n, uusia kolmioita muodostuu yhtä monta, kuin on K_{n-1}:n sivuja, ja jokaisen uuden kolmion pinta-ala on $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{n-1}A_1$. Siis

$A_n = A_1 + \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{4}{9}\right)^1 A_1 + \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{4}{9}\right)^2 A_1 + \ldots + \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1} A_1$

ja $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A_1 + \dfrac{3}{5}A_1 = \dfrac{8}{5}A_1$.)

Kertaustehtäviä

312. a) $\frac{1}{10}$ (Nimittäjä voidaan ilmaista tulona:

$$\frac{\sqrt{x}-5}{x-25} = \frac{\sqrt{x}-5}{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5)} = \frac{1}{\sqrt{x}+5}.$$

Voidaan myös laventaa summalla $\sqrt{x}+5$.)

b) $\frac{1}{6}$ (Lavennetaan summalla $\sqrt{x+10}+3$, jolloin lauseke tulee muotoon

$$\frac{x+1}{(x+1)(\sqrt{x+10}+3)} = \frac{1}{\sqrt{x+10}+3}.)$$

313. $a = -3$, raja-arvo 6
(Tulee olla $a \cdot (-1)^2 + 3 = 0$. Kun $a = -3$,

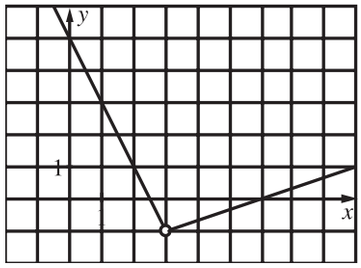
$$f(x) = \frac{-3x^2+3}{x+1} = \frac{-3(x^2-1)}{x+1}.)$$

314. -2
(Kun $0 \leqslant x < 1$ ja $1 < x \leqslant 3$, niin

$$\frac{|x-3|-|x+1|}{|x|-1} = \frac{(-x+3)-(x+1)}{x-1}.)$$

315. a) $\lim\limits_{x \to 2-} f(x) = -3$ ja $\lim\limits_{x \to 2+} f(x) = 5$.
Funktiolla f ei ole raja-arvoa kohdassa 2.
b) $\lim\limits_{x \to 2-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2+} f(x) = 3$.
Funktiolla f on kohdassa 2 raja-arvo 3.

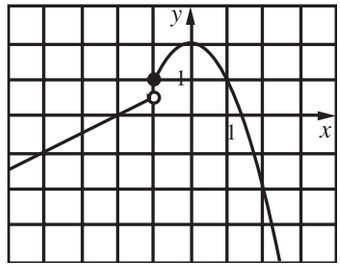
316. $a = \frac{1}{3}$ ja $c = 5$



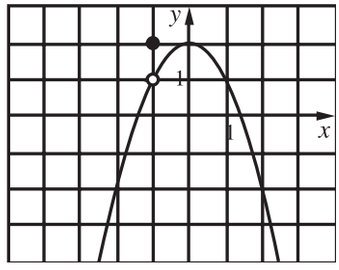
($\lim\limits_{x \to 3-} f(x) = -6 + c$ ja $\lim\limits_{x \to 3+} f(x) = 3a - 2$.
Tulee olla $-6 + c = -1$ ja $3a - 2 = -1$.)

317. a) Ei ole. (Rationaalifunktio on jatkuva koko määrittelyjoukossaan.)
b) Ei voida. (Funktiolla f ei ole raja-arvoa kohdassa 0.)

318. a) Ei ole, sillä funktiolla f ei ole raja-arvoa kohdassa -1.



b) Ei ole, sillä funktion raja-arvo kohdassa -1 on eri suuri kuin funktion arvo $f(-1) = 2$.



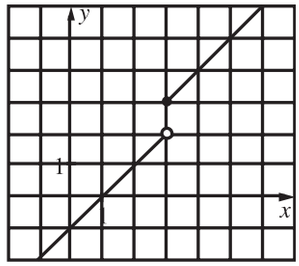
319. $a = -1$, $b = 3$ (Toispuolisista raja-arvoista saadaan yhtälöpari
$a = 4a + b$ ja $a + b = b - 1$.)

320. $f(3) = 1$ (Tulee olla $f(3) = \lim\limits_{x \to 3} f(x)$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{6x-18}.)$$

321. Esimerkiksi

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, \text{ kun } x < 3 \\ x \quad\;\; , \text{ kun } x \geqslant 3. \end{cases}$$

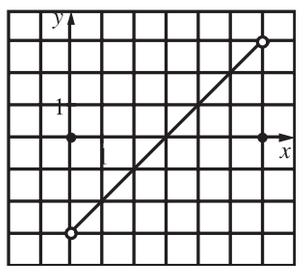


Funktio f on aidosti kasvava väleillä $]-\infty, 3[$ ja $[3, \infty[$, sillä näillä väleillä kuvaaja on nouseva suora. Lisäksi, jos $x_1 < 3 < x_2$, niin $f(x_2) - f(x_1) = x_2 - (x_1 - 1) = x_2 - x_1 + 1 > 0$, joten $f(x_1) < f(x_2)$.
Funktio f on epäjatkuva kohdassa 3, koska $\lim\limits_{x \to 3-} f(x) = 3 - 1 = 2 \neq 3 = f(3)$.

322. Tutkitaan funktiota
$g : [1, 2] \to \mathbb{R},\ g(x) = \ln f(x) - x$.
Koska f on jatkuva, myös g on jatkuva.
Olkoot x_1 ja x_2 sellaiset välin pisteet, että $f(x_1) = 1$ ja $f(x_2) = 8$. Tällöin
$g(x_1) = \ln 1 - x_1 = -x_1 < 0$ ja
$g(x_2) = \ln 8 - x_2 > \ln 8 - 2 \approx 0{,}08 > 0$.
Koska $f(x_1)$ ja $f(x_2)$ ovat erimerkkiset, välillä $]x_1, x_2[$ on sellainen kohta a, että $g(a) = 0$ eli $\ln f(a) = a$.

323. Esimerkiksi

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad\;\; , \text{ kun } x = 0 \\ x - 3, \text{ kun } 0 < x < 6 \\ 0 \quad\;\; , \text{ kun } x = 6. \end{cases}$$



(Koska funktiolla f ei ole suurinta eikä pienintä arvoa, esimerkkifunktio f ei voi olla jatkuva.)

324. $f'(2) = -\frac{1}{4}$

$$\left(\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x - 2} = \frac{2 - x}{2x} \cdot \frac{1}{x - 2}\right.$$

$$= -\frac{1}{2x} \to -\frac{1}{4}, \text{ kun } x \to 2, \text{ tai}$$

$$\frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \frac{\frac{1}{2 + h} - \frac{1}{2}}{h} = \frac{2 - (2 + h)}{2(2 + h)} \cdot \frac{1}{h}$$

$$= -\frac{h}{2(2 + h)} \cdot \frac{1}{h} = -\frac{1}{2(2 + h)} \to -\frac{1}{4},$$

kun $h \to 0$)

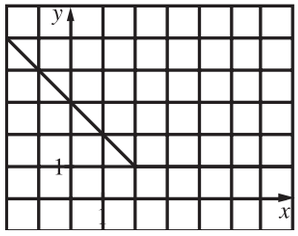
325. a) Ei ole. (Funktio f ei ole jatkuva kohdassa -1.)
b) On. (Kun $x < -1$, erotusosamäärä on

$$\frac{\left(\frac{1}{2}x^2 + 1\right) - \frac{3}{2}}{x + 1} = \frac{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}}{x + 1} = \frac{1}{2}(x - 1) \to -1,$$

kun $x \to -1-$. Kun $x > -1$, erotusosamäärä on $\dfrac{\left(-x + \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2}}{x + 1} = -1 \to -1$, kun $x \to -1+$.)

326. Esimerkiksi

$$f(x) = \begin{cases} -x + 3, & \text{kun } x \leqslant 2 \\ 1, & \text{kun } x > 2. \end{cases}$$



f on vähenevä väleillä $]-\infty, 2]$ ja $]2, \infty[$, sillä näillä väleillä kuvaaja on laskeva suora tai vaakasuora. Lisäksi, jos $x_1 \leqslant 2 < x_2$, niin $f(x_1) \geqslant 1 = f(x_2)$. Koska f on polynomifunktio, kun $x \neq 2$, f on jatkuva ja derivoituva, kun $x \neq 2$. Funktio f on vasemmanpuoleisesti jatkuva kohdassa 2 ja $f(2) = 1$. Koska $\lim\limits_{x \to 2+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2+} 1 = 1$, f on myös oikeanpuoleisesti jatkuva ja siis jatkuva kohdassa 2.

Koska $\lim\limits_{x \to 2-} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$

$= \lim\limits_{x \to 2-} \dfrac{(-x + 3) - 1}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2-} \dfrac{-x + 2}{x - 2}$

$= \lim\limits_{x \to 2-} (-1) = -1$ ja $\lim\limits_{x \to 2+} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$

$= \lim\limits_{x \to 2+} \dfrac{1 - 1}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2+} 0 = 0 \neq -1$, niin funktio f ei ole derivoituva kohdassa 2.

327. Funktiolle $g(x) = f(x)e^{-x^2}$ on

$g'(x) = f'(x)e^{-x^2} - 2xf(x)e^{-x^2}$

$= (f'(x) - 2xf(x))e^{-x^2} = 0$ kaikilla x,

joten integraalilaskennan peruslauseen nojalla funktio g on vakiofunktio.

Funktiot ovat muotoa $f(x) = Ce^{x^2}$, missä C on vakio.

($f(x)e^{-x^2} = C$, joten $f(x) = Ce^{x^2}$, missä C on vakio.)

328. a) 1

b) Ei raja-arvoa, arvot pienenevät rajatta.

($\dfrac{e^{2x} - 3e^x}{e^{2x}} = 1 - 3e^{-x}$)

329. a) $f(t) \to 0$, kun $t \to \infty$ tai $t \to -\infty$

b) $g(x) \to \dfrac{3}{5}$, kun $x \to \infty$ tai $x \to -\infty$

c) ei raja-arvoja, $h(x) \to \infty$, kun $x \to \infty$, ja $h(x) \to -\infty$, kun $x \to -\infty$

330. ln 3 ($f(x) = \ln(3e^{2x} + e^x) - 2x$

$= \ln(3e^{2x} + e^x) - \ln e^{2x} = \ln \dfrac{3e^{2x} + e^x}{e^{2x}}$)

331. suurin arvo 8 ja pienin arvo 0

(Koska funktiolla $x^2 + x + 1$ ei ole nollakohtia, funktio f on määritelty kaikilla muuttujan arvoilla. Derivaattafunktion

$$f'(x) = \frac{6x^2 + 12x}{(x^2 + x + 1)^2}$$

nollakohdat ovat -2 ja 0.

Kulkukaaviosta (osoittaja määrää derivaatan merkin) nähdään, että funktio f on aidosti kasvava, kun $x \leqslant -2$, aidosti vähenevä, kun $-2 \leqslant x \leqslant 0$, ja aidosti kasvava, kun $x \geqslant 0$.

Koska $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 6 < 8$, maksimiarvo $f(-2) = 8$ on suurin arvo.

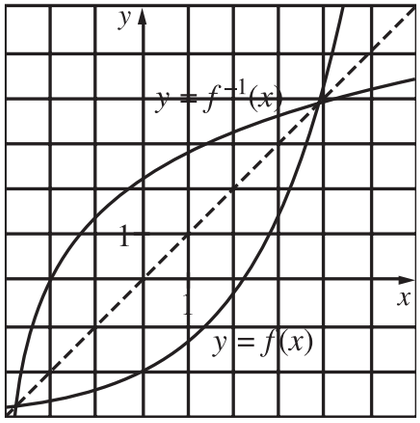
Koska $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 6 > 0$, minimiarvo $f(0) = 0$ on pienin arvo.)

332. Koska $f'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} > 0$ kaikilla x, niin funktio f on aidosti kasvava. Siis funktiolla f on käänteisfunktio. Käänteisfunktion määrittelyjoukko on $]-3, \infty[$.

$f^{-1}(x) = 2\ln(x+3)$,

$f(f^{-1}(x)) = e^{\frac{1}{2}\cdot 2\ln(x+3)} - 3$

$= e^{\ln(x+3)} - 3 = x + 3 - 3 = x$.



(Käänteisfunktion määrittelyjoukko on funktion f arvojoukko. Koska $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -3$ ja $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$, funktion f arvojoukko on $]-3, \infty[$. Käänteisfunktion $f^{-1}(y)$ lauseke saadaan ratkaisemalla x yhtälöstä $e^{\frac{1}{2}x} - 3 = y$.)

333. Koska $f'(x) = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$ kaikilla $x > 0$, funktio f on aidosti kasvava välillä $[0, \infty[$. Siis funktiolla f on käänteisfunktio.

$(f^{-1})'(2) = \frac{2}{5}$ ja $(f^{-1})'(18) = \frac{4}{33}$

334. a)

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}e^{-2x} + C & , \text{kun } x < 0 \\ x^2 + x - \frac{1}{2} + C & , \text{kun } x \geqslant 0 \end{cases}$$

b)

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2} & , \text{kun } x < 0 \\ x^2 + x & , \text{kun } x \geqslant 0 \end{cases}$$

(Funktio f on jatkuva, joten funktiolla f on integraalifunktio. Integraalifunktiot ovat muotoa

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}e^{-2x} + C, & \text{kun } x < 0 \\ x^2 + x + D, & \text{kun } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Koska integraalifunktion on oltava jatkuva kohdassa 0, tulee olla $-\frac{1}{2} + C = D$.)

335. $F(-2) = -5$

(Koska funktio f on jatkuva, funktiolla f on integraalifunktio. Koska

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 2x, & \text{kun } x < 1 \\ -1 & , \text{kun } x \geqslant 1, \end{cases}$$

niin funktion f integraalifunktiot ovat muotoa

$$F(x) = \begin{cases} x - x^2 + C, & \text{kun } x < 1 \\ -x + D & , \text{kun } x \geqslant 1. \end{cases}$$

Jatkuvuudesta kohdassa 1 saadaan ehto $C = -1 + D$. Integraalifunktio, jonka kuvaaja kulkee pisteen $(2, 0)$ kautta on

$$F(x) = \begin{cases} x - x^2 + 1, & \text{kun } x < 1 \\ -x + 2 & , \text{kun } x \geqslant 1.) \end{cases}$$

336. a) $u'(x) = (x^2 + 1)^3$

b) $v'(x) = -(x^2 + 1)^3 \quad (v(x) = -\int_3^x (t^2 + 1)^3 \, dt.$

Toinen tapa: jos F on funktion $f(x) = (t^2 + 1)^3$ integraalifunktio, niin $v(x) = F(3) - F(x)$, joten $v'(x) = -F'(x) = -f(x)$.)

c) $w'(x) = 10x(25x^4 + 1)^3$

$(w'(x) = ((5x^2)^2 + 1)^3 \cdot \mathrm{D}5x^2.$

Toinen tapa: $w(x) = F(5x^2) - F(3)$, joten $w'(x) = F'(5x^2) \cdot \mathrm{D}5x^2 = 10xf(5x^2)$.)

337. 0 ja $\frac{1}{3} \quad (f'(x) = (x - 3x^2)e^{-x^2})$

338. a) $\frac{1}{3} \quad (\int_1^s \frac{1}{x^4} \, dx = -\frac{1}{3}(\frac{1}{s^3} - 1))$

b) Hajaantuu. $(\int_0^s \cos x \, dx = \sin s)$

339. a) $\frac{1}{4} e^{-4} \quad (\int_s^{-1} e^{4x} \, dx$

$= \frac{1}{4}(e^{-4} - e^{4s}) \to \frac{1}{4}(e^{-4} - 0)$, kun $s \to -\infty)$

b) Hajaantuu. $(\int_{-1}^s e^{4x} \, dx = \frac{1}{4}(e^{4s} - e^{-4}) \to \infty,$

kun $s \to \infty)$

c) Hajaantuu. $(\int_{-1}^{\infty} e^{4x} \, dx$ hajaantuu.)

340. $\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\int_s^1 \frac{dx}{\sqrt{4x-1}} = \frac{1}{2} \Big/_s^1 \sqrt{4x-1}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{4s-1} \to \frac{\sqrt{3}}{2}$, kun $s \to \frac{1}{4}+)$

341. $a = 0{,}02$, $\mathrm{P}(10 \leqslant X \leqslant 50) \approx 0{,}45$

$(\int_0^{\infty} ae^{-0{,}02x} \, dx = 50a$. Tulee olla $50a = 1.$

$\mathrm{P}(10 \leqslant X \leqslant 50) = 0{,}02 \int_{10}^{50} e^{-0{,}02x} \, dx$

$= \Big/_{10}^{50} -e^{-0{,}02x}.)$

342. a) $f(x) \geqslant 0$ kaikilla x ja $\int_0^1 3x^2 \, dx = 1,$

joten f on tiheysfunktio.

b) $F(x) = \begin{cases} 0, \text{ kun } x < 0 \\ x^3, \text{ kun } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1, \text{ kun } x > 1, \end{cases}$

$\mathrm{P}(X > 0{,}67) = 1 - 0{,}67^3 \approx 0{,}70$

c) $\mathrm{E}(X) = \frac{3}{4}, \quad \mathrm{D}(X) = \sqrt{\frac{3}{80}} \approx 0{,}19$

$(\mathrm{E}(X) = \int_0^1 x \cdot 3x^2 \, dx = 3\int_0^1 x^3 \, dx,$

$\mathrm{D}^2(X) = \int_0^1 (x - \frac{3}{4})^2 \cdot 3x^2 \, dx$

$= 3\int_0^1 (x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{16}x^2) dx)$

343. a)
$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \text{kun } x < 0 \\ \frac{x^3}{27} & , \text{kun } 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ 1 & , \text{kun } x > 3 \end{cases}$$

(Kun $0 \leqslant x \leqslant 3$, todennäköisyys on x metriä korkean kartion tilavuuden suhde koko kartion tilavuuteen. Kartiot ovat yhdenmuotoiset, ja niiden tilavuuksien suhde on korkeuksien suhteen kuutio.)

b)
$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{kun } x < 0 \\ \frac{x^2}{9} & , \text{kun } 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ 0 & , \text{kun } x > 3 \end{cases}$$

(Tiheysfunktion arvoja $f(0)$ ja $f(3)$ ei ole saatu derivoimalla.)

c) $\mathrm{E}(X) = 2{,}25$ m $\quad (\int_0^3 x \cdot \frac{x^2}{9}\,\mathrm{d}x)$

344. a) Suppenee. Raja-arvo on 0.
b) Hajaantuu.
c) Hajaantuu. (Parilliset jäsenet lähestyvät lukua $\frac{2}{3}$ ja parittomat lukua $-\frac{2}{3}$.)
d) Suppenee. Raja-arvo on 0.

345. a) -2 $\quad (\frac{15 \cdot 3^n - 6 \cdot 4^n}{3 \cdot 4^n} = 5\left(\frac{3}{4}\right)^n - 2)$

b) $\frac{1}{4}$

346. a) $\frac{1}{12}$ $\qquad$ b) 5 $\quad (n - \frac{n^2 - 2n}{n+3} = \frac{5n}{n+3})$

347. a) $\frac{27}{8}$ $\quad (\frac{(6n-1)^3}{(4n+2)^3} = \left(\frac{6n-1}{4n+2}\right)^3)$

b) $\frac{2}{\sqrt{6}}$ $\quad (\frac{2n-3}{\sqrt{6n^2+4}} = \frac{2 - \frac{3}{n}}{\sqrt{6 + \frac{4}{n^2}}})$

348. 0
(Koska $|\cos(n^2+1)| \leqslant 1$ kaikilla n, niin $|\frac{\cos(n^2+1)}{n^2}| \leqslant \frac{1}{n^2}$ kaikilla n. Koska $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, niin $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cos(n^2+1)}{n^2} = 0$.)

349. raja-arvo $\frac{2}{3}$, n:n arvosta 22 222 lähtien
(Jäsenen a_n etäisyys raja-arvosta on $\left|\frac{2n}{3n+1} - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{-2}{9n+3}\right| = \frac{2}{9n+3}$.
Ratkaistaan epäyhtälö $\frac{2}{9n+3} < 10^{-5}$.)

350. $-\frac{1}{4}$ (Laventamalla summalla $2n + \sqrt{4n^2+n}$ saadaan $a_n = 2n - \sqrt{4n^2+n}$ $= -\frac{n}{2n + \sqrt{4n^2+n}} = -\frac{1}{2 + \sqrt{4 + \frac{1}{n}}}$.)

351. a) Hajaantuu. (Osasummien jonossa esiintyy toistuvasti sekä nollia että ykkösiä.)
b) Suppenee, summa on 0. (Kun n on pariton, $S_n = \frac{1}{n}$, ja kun n on parillinen, $S_n = 0$.)

352. a) $S_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{3}$, sarja hajaantuu.
(Kun osasumma S_n kirjoitetaan auki, kaikki muut neliöjuuret kumoutuvat.)
b) $S_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$. Sarja suppenee, ja sen summa on 1.
(Kun osasumma S_n kirjoitetaan auki, kaikki muut neliöjuuret kumoutuvat.)

353. Hajaantuu.
(Sarjan n. termi on $\frac{n}{100n+1}$. Koska $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{100n+1} = \frac{1}{100} \neq 0$, sarja hajaantuu.)

354. a) $\frac{2}{3}$ $\left(a = \frac{2}{5} \text{ ja } q = \frac{2}{5}\right)$

b) $-\frac{5}{7}$ $\left(a = -1 \text{ ja } q = -\frac{2}{5}\right)$

355. pistettä $2\frac{1}{3}$

(Etäisyys pisteestä -3 on

$8 - \frac{1}{2} \cdot 8 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 8 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 8 + \ldots$.)

356. a) $\frac{4}{7}$ $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{8}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \ldots\right)$

b) $\frac{2}{7}$ $\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{8}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \ldots\right)$

c) $\frac{1}{7}$ $\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{8}\right)^2 \cdot \frac{1}{8} + \ldots\right)$

357. Suppenee, kun $x < -8$ tai $x > -2$,

$S(x) = \frac{x+5}{x+8}$, $x < -8$ tai $x > -2$.

(Sarja on määritelty, kun $x \neq -5$. Sarja suppenee, kun $\left|\frac{3}{x+5}\right| < 1$ eli kun $|x+5| > 3$.

Epäyhtälö toteutuu, kun $x + 5 < -3$ tai $x + 5 > 3$.)

358. arvolla 2

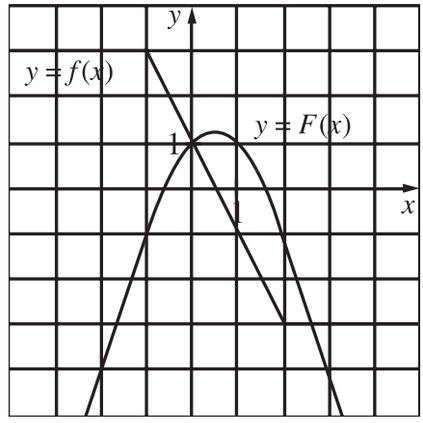
(Sarja on määritelty, kun $x \neq 0$. Sarja suppenee, kun $\left|\frac{1}{x^2}\right| < 1$ eli kun $\frac{1}{x^2} < 1$. Suppenemisehdoksi tulee $x < -1$ tai $x > 1$. Tällöin sarjan summa on $\frac{x}{x^2-1}$. Yhtälön $\frac{x}{x^2-1} = \frac{2}{3}$ juuret ovat $-\frac{1}{2}$ ja 2, joista jälkimmäinen täyttää suppenemisehdon.)

359. $8 + \frac{1}{3} \cdot 8 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 8 + \ldots$

(Yhtälöparista $\frac{a}{1-q} = 12$ ja $\frac{a}{1-q^2} = 9$ ratkaistaan ensin q ja sitten a.)

Sarja A

1. $F(x) = \begin{cases} 3x + 2 & , \text{kun } x < -1 \\ -x^2 + x + 1 & , \text{kun } -1 \leqslant x \leqslant 2 \\ -3x + 5 & , \text{kun } x > 2 \end{cases}$



(Koska f on jatkuva, sillä on integraalifunktio. Koska

$f(x) = \begin{cases} 3 & , \text{kun } x < -1 \\ -2x + 1 & , \text{kun } -1 \leqslant x \leqslant 2 \\ -3 & , \text{kun } x > 2, \end{cases}$

niin integraalifunktiot ovat muotoa

$F(x) = \begin{cases} 3x + C & , \text{kun } x < -1 \\ -x^2 + x + D & , \text{kun } -1 \leqslant x \leqslant 2 \\ -3x + E & , \text{kun } x > 2. \end{cases}$

Jatkuvuusehdot ovat $-3 + C = -2 + D$ (kohdassa $x = -1$) ja $-2 + D = -6 + E$ (kohdassa $x = 2$). Integraalifunktiot ovat

$F(x) = \begin{cases} 3x + C & , \text{kun } x < -1 \\ -x^2 + x - 1 + C & , \text{kun } -1 \leqslant x \leqslant 2 \\ -3x + 3 + C & , \text{kun } x > 2. \end{cases}$)

2. $\frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \frac{\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{9}\right)}{x - 3} = \frac{9 - x^2}{9x^2} \cdot \frac{1}{x - 3}$

$= -\frac{3 + x}{9x^2} \to -\frac{2}{27}$, kun $x \to 3$.

Siis $f'(3) = -\frac{2}{27}$.

3. ln 2

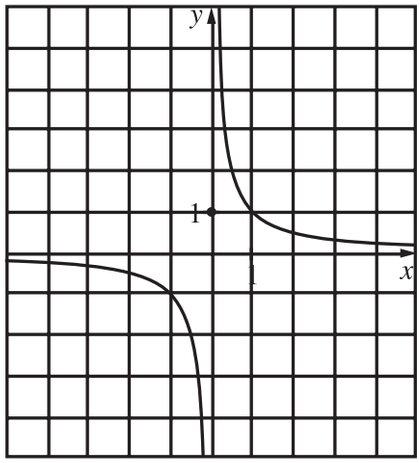
$$\left(\int_0^s \left(1 - \frac{e^x}{e^x+1}\right)dx = \right/_0^s (x - \ln(e^x+1))$$

$$= \left/_0^s \ln\frac{e^x}{e^x+1} = \ln\frac{e^s}{e^s+1} - \ln\frac{1}{2}\right.$$

$$= \ln\frac{1}{1+e^{-s}} - \ln\frac{1}{2} \to \ln\frac{1}{1+0} - \ln\frac{1}{2},$$

kun $s \to \infty$)

4.



$f(x) = \frac{1}{x}$, kun $x \neq 0$, ja $f(0) = 1$

(Kun $x \neq 0$, niin

$$\frac{1+nx}{1+nx^2} = \frac{\frac{1}{n}+x}{\frac{1}{n}+x^2} \to \frac{0+x}{0+x^2} = \frac{1}{x}, \text{ kun } n \to \infty.$$

Kun $x = 0$, $\frac{1+nx}{1+nx^2} = 1$ kaikilla n.)

5. $a = \frac{\pi}{3}$ (Välillä $]0, \pi[$ on $\sin x \geqslant 0$, joten alue on x-akselin yläpuolella. Viipaleen pinta-ala on $A(a) = \int_a^{2a} \frac{\sin x}{x}\,dx$. Kulkukaavion avulla nähdään, että funktio $A(a)$ saa suurimman arvon derivaattafunktion $A'(a) = \frac{\sin 2a}{a} - \frac{\sin a}{a}$ välillä $]0, \frac{\pi}{2}[$ olevassa nollakohdassa $\frac{\pi}{3}$.)

6. $P(Z < 2) = \frac{3}{4}$ (Luvut x ja y tulkitaan neliön $0 \leqslant x \leqslant 1$ ja $0 \leqslant y \leqslant 1$ pisteen (x, y) koordinaateiksi. $P(Z < 2)$ on suoran $y = 2x$ alapuolelle jäävän neliön osan pinta-alan suhde koko neliön pinta-alaan.)

a)
$$F(z) = \begin{cases} 0 & , \text{kun } z < 0 \\ \frac{z}{2} & , \text{kun } 0 \leqslant z \leqslant 1 \\ 1 - \frac{1}{2z} & , \text{kun } z > 1 \end{cases}$$

b)
$$f(z) = \begin{cases} 0 & , \text{kun } z < 0 \\ \frac{1}{2} & , \text{kun } 0 \leqslant z \leqslant 1 \\ \frac{1}{2z^2} & , \text{kun } z > 1 \end{cases}$$

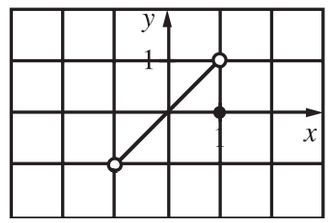
(Arvoja $f(0)$ ja $f(1)$ ei ole saatu derivoimalla.)

c) Ei odotusarvoa. ($\int_1^\infty zf(z)\,dz$ hajaantuu.)

Sarja B

1. $a = -4$, nollakohdat $-\sqrt{2}$ ja 2
(Jatkuvuusehto on $2 + a = -2$.)

2. $S(x) = \begin{cases} x, \text{kun } -1 < x < 1 \\ 0, \text{kun } x = 1 \end{cases}$



(Kun $x = 1$, sarja on $0 + 0 + \ldots$, joten sarja suppenee ja sen summa on 0. Kun $x \neq 1$, sarja on geometrinen sarja, joka suppenee, kun $-1 < x < 1$.)

3. 1

$\left(\int_1^\infty \left(\frac{1}{x^2} + \cos nx\right) dx = -\frac{1}{n} + 1 + \frac{1}{n}(\sin n^2 - \sin n).\right.$

Kun $n \to \infty$, niin $-\frac{1}{n} \to 0$.

Koska $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ kaikilla x, niin

$-2 \leqslant \sin n^2 - \sin n \leqslant 2$.

Siis myös $\frac{1}{n}(\sin n^2 - \sin n) \to 0$, kun $n \to \infty$.)

4. Koska $x < \sqrt{x^2+1}$ kaikilla x, niin

$f'(x) = \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} < 0$ kaikilla x.

Siis funktiolla f on käänteisfunktio.

Käänteisfunktion määrittelyjoukko on $]0, \infty[$.

$x_0 = 1$ ja $(f^{-1})'(x_0) = -1$

(Koska $f(x) \to \infty$, kun $x \to -\infty$, ja

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} \to 0$, kun $x \to \infty$, niin funktion f arvojoukko on $]0, \infty[$. Koska $f(0) = 1$, niin

$f^{-1}(1) = 0$ ja $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)}$.)

5. Kun $n \geqslant 6$, niin $\frac{n+5}{3n} < \frac{n+n}{3n} = \frac{2}{3}$.

(Voidaan myös ratkaista epäyhtälö $\frac{n+5}{3n} < \frac{2}{3}$.)

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ja $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{2n}\right)^n = 0$

(Kun $n \geqslant 6$, niin $0 \leqslant \left(\frac{n+5}{3n}\right)^n \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Koska

$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$, niin $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+5}{3n}\right)^n = 0$. Vastaavasti etsitään jokin ykköstä pienempi luku q niin, että jostain n:n arvosta lähtien $\frac{n+1}{2n} < q$. Voidaan esimerkiksi arvioida: kun $n \geqslant 3$, niin

$\frac{n+1}{2n} < \frac{n+\frac{1}{2}n}{2n} = \frac{3}{4}$. Voidaan myös ratkaista esimerkiksi epäyhtälö $\frac{n+1}{2n} < \frac{3}{4}$. Kun on löydetty q, raja-arvo päätellään kuten edellä.)

6. $g''(0) = 2f(0)$

Tulosta voidaan soveltaa funktioon $f(x) = x|x| + 3$.

(Tulon derivointikaavan mukaan

$g'(x) = 2xf(x) + x^2 f'(x)$.

Funktion $g'(x)$ erotusosamäärä kohdassa 0 on

$\frac{2xf(x) + x^2 f'(x)}{x} = 2f(x) + xf'(x)$.

Koska f on derivoituva kohdassa 0, f on jatkuva kohdassa 0, jolloin $f(x) \to f(0)$, kun $x \to 0$.

Koska f' on jatkuva kohdassa 0, $f'(x) \to f'(0)$, kun $x \to 0$. Siis

$2f(x) + xf'(x) \to 2f(0) + 0 \cdot f'(0) = 2f(0)$,

kun $x \to 0$.

Funktion g toista derivaattaa $g''(0)$ ei voida muodostaa derivointikaavoilla, sillä $f''(0)$ ei välttämättä ole olemassa.

Funktio

$$f(x) = x|x| + 3 = \begin{cases} -x^2 + 3, \text{ kun } x < 0 \\ x^2 + 3, \text{ kun } x \geqslant 0 \end{cases}$$

on polynomifunktiona derivoituva, kun $x \neq 0$, ja lisäksi derivoituva kohdassa 0, sillä

$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x|x|}{x} = |x| \to 0$, kun $x \to 0$.

Derivaattafunktio

$$f'(x) = \begin{cases} -2x, \text{ kun } x < 0 \\ 2x, \text{ kun } x \geqslant 0 \end{cases}$$

on jatkuva, mutta ei derivoituva, kohdassa 0.)

Sarja C

1. $a = -4$, $b = 12$ (Jotta raja-arvo olisi olemassa, osoittajan $ax^2 + 1$ tulee olla nolla, kun $x = \frac{1}{2}$.

Saadaan $a = -4$. Funktion f raja-arvo on tällöin $-2 + \frac{b}{4}$.)

2. 1 $\left(n(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}\right.$

$= \frac{2n}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}} = \left.\frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}}\right)$

3. Suppenee, kun $-\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi < x < n \cdot 2\pi$ tai

$n \cdot 2\pi < x < \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$, n kokonaisluku.

Summa on $\frac{1}{2 \cos x}$.

(Sarja $\sum_{n=0}^{\infty} (1 - 2 \cos x)^n$

$= 1 + (1 - 2 \cos x) + (1 - 2 \cos x)^2 + \ldots$
on geometrinen sarja, jossa $q = 1 - 2 \cos x$.
Sarja suppenee, kun $-1 < 1 - 2 \cos x < 1$ eli kun $0 < \cos x < 1$.
Epäyhtälö $\cos x < 1$ toteutuu, kun $x \neq n \cdot 2\pi$, n kokonaisluku.
Epäyhtälö $\cos x > 0$ toteutuu väleillä
$-\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi < x < \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$, n kokonaisluku.)

4. $P(X \leqslant 10) = \frac{5}{16} \approx 0{,}31$ (10 cm:n korkuisen pallosegmentin tilavuuden $\pi \cdot 10^2(20 - \frac{10}{3})$ suhde padan tilavuuteen $\frac{2}{3}\pi \cdot 20^3$)

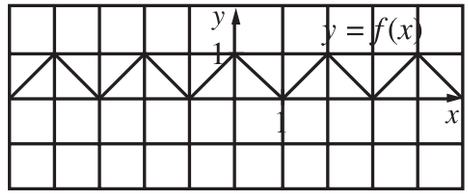
a)
$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \text{kun } x < 0 \\ \frac{3}{16\,000} x^2(20 - \frac{x}{3}) & , \text{kun } 0 \leqslant x \leqslant 20 \\ 1 & , \text{kun } x > 20 \end{cases}$$

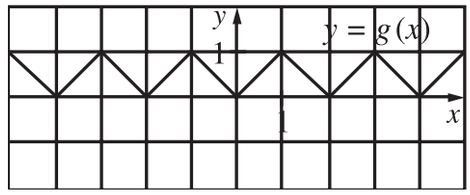
b)
$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{kun } x < 0 \\ \frac{3}{16\,000} (40x - x^2) & , \text{kun } 0 \leqslant x \leqslant 20 \\ 0 & , \text{kun } x > 20 \end{cases}$$

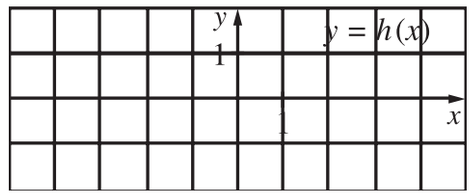
(Arvoja $f(0)$ ja $f(20)$ ei ole saatu derivoimalla.)

c) 12,5 cm

5. f ja g eivät ole derivoituvia kohdissa $x = n$, n kokonaisluku.
h on derivoituva kaikkialla.







(f ei ole derivoituva kohdassa 0, sillä erotusosamäärän vasemmanpuoleinen raja-arvo on 1 ja oikeanpuoleinen -1. Vastaavat raja-arvot kohdassa 1 ovat -1 ja 1. Koska funktion f jakso on 2, funktio f ei ole derivoituva missään kokonaislukupisteessä. Tällöin myöskään funktio $g(x) = f(x + 1)$ ei ole derivoituva kokonaislukupisteissä. Välillä $[-1, 1]$ on $g(x) = -x$, kun $-1 \leqslant x \leqslant 0$, ja $g(x) = x$, kun $0 \leqslant x \leqslant 1$, joten funktio $h(x) = f(x) + g(x)$ on vakiofunktio 1 välillä $[-1, 1]$ ja jaksollisuuden takia kaikkialla.)

6. Oletetaan, että $x > y$. Tällöin
$f(x) - f(y) \geqslant x - y > 0$, joten $f(x) > f(y)$.
Siis funktio f on kasvava.
Oletetaan, että f on derivoituva eli

$f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ on olemassa jokaisessa pisteessä a.
Oletetaan, että $x > a$. Tällöin

$\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqslant \dfrac{x - a}{x - a} = 1$, joten

$f'(a) = \lim\limits_{x \to a+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqslant 1.$

Esimerkkifunktio:

$$f(x) = \begin{cases} x & , \text{kun } x < 0 \\ x + 1 & , \text{kun } x \geqslant 0. \end{cases}$$

(On perusteltava, että esimerkkifunktiolla on ominaisuus (1). Annetulle funktiolle pätee:
jos $0 > x > y$ tai $x > y > 0$, niin
$f(x) - f(y) = x - y \geqslant x - y$, ja jos $x > 0 > y$, niin
$f(x) - f(y) = x - y + 1 > x - y$.
Funktio f on epäjatkuva kohdassa 0, sillä
$\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = 0 \neq 1 = f(0)$.)

Sarja D

1. 11,3 m $(2{,}0 + 2(1{,}4 + 0{,}7 \cdot 1{,}4 + 0{,}7^2 \cdot 1{,}4 + \ldots))$

2. $\dfrac{5}{6}$

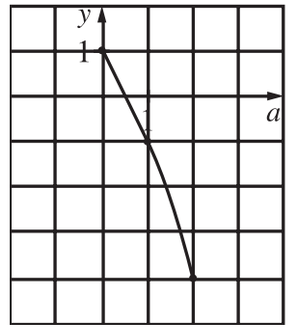
3. n. jäsen $\dfrac{3n - 2}{n + 1}$, raja-arvo 3,
n:n arvosta 5 000 lähtien
(Poikkeama on $\left| \dfrac{3n - 2}{n + 1} - 3 \right| = \dfrac{|-5|}{|n + 1|} = \dfrac{5}{n + 1}$.)

4. pienin arvo 0, suurinta arvoa ei ole
(Derivaattafunktion
$f'(x) = 3e^{3x} - 12e^{2x} + 9e^x = 3e^x(e^{2x} - 4e^x + 3)$
nollakohdat 0 ja $\ln 3$ saadaan toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla merkitsemällä ensin $e^x = t$.
Kulkukaavion mukaan funktio f on aidosti kasvava, kun $x \leqslant 0$, aidosti vähenevä, kun
$0 \leqslant x \leqslant \ln 3$, ja aidosti kasvava, kun $x \geqslant \ln 3$.
Koska $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, niin minimiarvo
$f(\ln 3) = 0$ on funktion pienin arvo.
Koska esimerkiksi $f(4) \approx 145\,000 > f(0) = 4$, funktiolla f ei ole suurinta arvoa.)

5.
$$f(a) = \begin{cases} 1 - 2a, \text{ kun } 0 \leqslant a \leqslant 1 \\ -a^2 \quad , \text{ kun } 1 < a \leqslant 2, \end{cases}$$

$f'(\frac{3}{2}) = -3.$

Funktiolla f on derivaatta välin $]0, 2[$ jokaisessa pisteessä.



(Funktion g derivaattafunktion nollakohta on a. Kulkukaaviosta nähdään, että kun $0 \leqslant a \leqslant 1$, g on aidosti kasvava välillä $[1, 4]$, joten pienin arvo on $g(1)$. Kun $1 < a \leqslant 2$, pienin arvo on $g(a)$. Koska f on polynomifunktio, kun $a \neq 1$, funktiolla on derivaatta, kun $a \neq 1$.
Derivoituvuutta kohdassa 1 tutkitaan määrittämällä erotusosamäärän toispuoliset raja-arvot.)

6. $f'(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x^2\sqrt{1-4x^2}}$, kun $-\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{1}{2}$ ja $x \neq 0$,

$f'(0) = 2$; $-1 < f(x) < 1$, kun $-\dfrac{2}{5} < x < \dfrac{2}{5}$

$(f'(x) = \dfrac{\dfrac{4x^2}{\sqrt{1-4x^2}} - (1-\sqrt{1-4x^2})}{x^2}$, kun $x \neq 0.$

Derivaatta $f'(0)$ on erotusosamäärän

$\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x^2} = \dfrac{4x^2}{x^2(1+\sqrt{1-4x^2})}$

$= \dfrac{4}{1+\sqrt{1-4x^2}}$ raja-arvo kohdassa 0.

Koska $1-4x^2 < 1$, niin $\sqrt{1-4x^2} < 1$, joten $f'(x) > 0$, kun $-\dfrac{1}{2} < x < 0$ ja $0 < x < \dfrac{1}{2}$. Siis funktio f on aidosti kasvava välillä $-\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{1}{2}$.

Yhtälö $\dfrac{1}{x}(1-\sqrt{1-4x^2}) = 1$ toteutuu, kun $x = \dfrac{2}{5}$, joten $f(\dfrac{2}{5}) = 1$ ja $f(-\dfrac{2}{5}) = -f(\dfrac{2}{5}) = -1$.

Koska f on aidosti kasvava, epäyhtälö $-1 < f(x) < 1$ pätee, kun $-\dfrac{2}{5} < x < \dfrac{2}{5}$.)

Sarja E

1. a)

$$F(x) = \begin{cases} \cos x + C & , \text{kun } x < 0 \\ -\cos x + 2 + C, & \text{kun } x \geqslant 0 \end{cases}$$

b) $F(x) = \sin x + C$

(Koska $\sin(-x) = -\sin x$, niin

$$\sin|x| = \begin{cases} -\sin x, & \text{kun } x < 0 \\ \sin x, & \text{kun } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Koska $\cos(-x) = \cos x$, niin $\cos|x| = \cos x$.)

2. Esimerkiksi vakiojono 1, 1, 1, ... , sillä sarjan $1 + 1 + 1 + \ldots$ n. osasumma on n, joten jono hajaantuu.

Jos sarja $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ suppenee, niin $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Siis jos lukujono hajaantuu, sarja ei suppene.

(Esimerkkijonoksi käy myös jono $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots,$ sillä harmoninen sarja $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots$ hajaantuu.)

3. $-2\ln 9 \quad (\int_0^s (\dfrac{2}{x+3} - \dfrac{6}{3x+1})\,dx$

$= \int_0^s (2\ln|x+3| - 2\ln|3x+1|)$

$= \int_0^s \ln\left(\dfrac{x+3}{3x+1}\right)^2$

$= \ln\left(\dfrac{s+3}{3s+1}\right)^2 - \ln 9 \to \ln\dfrac{1}{9} - \ln 9$, kun $s \to \infty$)

4. Koska $f'(x) = 2e^{2x} + 1 > 0$ kaikilla x, funktiolla f on käänteisfunktio.

Leikkauspiste on $(\ln 2, \ln 2)$ ja tangentin kulmakerroin $\dfrac{1}{9}$.

(Leikkauspisteen x-koordinaatille pätee $f(x) = x$ eli $e^{2x} + x - 4 = x$.

$(f^{-1})'(\ln 2) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(\ln 2))} = \dfrac{1}{f'(\ln 2)}$.)

5. $|f(x)-f(y)|$ on jompikumpi luvuista $f(x)-f(y)$ ja $f(y)-f(x)$. Koska $f(x)-f(y) \leqslant (x-y)^2$ ja $f(y)-f(x) \leqslant (y-x)^2$ ja $(y-x)^2=(x-y)^2$, niin $|f(x)-f(y)| \leqslant (x-y)^2$.

Epäyhtälön nojalla on

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right| \leqslant |x-a|,$$

joten $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=0$ kaikilla a.

Integraalilaskennan peruslauseen nojalla funktio f on vakiofunktio.

6. a) $f(1)=0 \quad (f(1)=f(1\cdot 1)=f(1)+f(1)$. Siis $f(1)=2f(1).)$

b) $f(x)=f(a)+f(\frac{x}{a})$, joten

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)+\lim_{x\to a} f(\frac{x}{a}).$$

Kun $x\to a$, niin $\dfrac{x}{a}\to 1$.

Koska $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)=0$, niin $\lim\limits_{x\to a} f(\frac{x}{a})=0$.

c) Erotusosamäärä kohdassa a on

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{f\left(\frac{x}{a}\right)}{x-a}=\frac{1}{a}\,\frac{f\left(\frac{x}{a}\right)-0}{\frac{x}{a}-1}.$$

Kun $x\to a$, niin $\dfrac{x}{a}\to 1$ ja $\dfrac{f\left(\frac{x}{a}\right)-0}{\frac{x}{a}-1}\to f'(1)$.

Siis $f'(a)=\dfrac{1}{a}\,f'(1)$.

d) esimerkiksi funktio $\ln x$ ja vakiofunktio 0

Hakemisto

alkeisfunktio 20

arkuskosini
määritelmä 79
derivaatta 89

arkussini
määritelmä 79
derivaatta 89

arkustangentti
määritelmä 80
derivaatta 89

asymptootti 57

Bolzanon lause 36

derivaatta
kuvaileva määritelmä 42
määritelmä 44
toispuoliset derivaatat 47

derivaattafunktio 43

derivoiminen 43

derivointioperaattori D 43

derivoituvuus 44

epäjatkuvuuskohta 30

epäoleellinen integraali
määritelmä 110
ylä- ja alarajalla epäoleellinen integraali 114

erotusosamäärä 44

Eulerin vakio 157

funktion raja-arvo 19

geometrinen jono 161

geometrinen sarja
määritelmä 162
suppenemisehto ja summa 162
jäännöstermi 171

harmoninen sarja 155

integraalifunktio 94

integraalifunktion olemassaololause 94

integraalilaskennan peruslause 49

integroiminen 94

iteroiminen 146

jatkuva satunnaismuuttuja 120

jatkuvan funktion väliarvolause 36

jatkuvuus
määritelmä 30
toispuolinen jatkuvuus 33

kertymäfunktio 124

keskihajonta 123

Kochin lumihiutale 172

käänteisfunktio
määritelmä 72
derivointikaava 85

käänteisfunktion kuvaaja 75

lukujonon raja-arvo
määritelmä 137
geometrisen jonon raja-arvo 138
jonon $a_n = \frac{1}{n^p}$ raja-arvo 138
jonon $g(a_n)$ raja-arvo 142
rekursiivisen jonon raja-arvo 144

määrätyn integraalin derivaattalause 98

odotusarvo 122

oikeanpuoleinen jatkuvuus 33

oikeanpuoleinen raja-arvo 22

osasumma 151

paloittain määritelty funktio 7

raja-arvo
funktion raja-arvo 19
toispuoliset raja-arvot 22
raja-arvo äärettömyydessä 54
lukujonon raja-arvo 137

rajoitettu lukujono 149

sarja
määritelmä 151
suppeneminen ja summa 151
geometrinen sarja 162

suurimman ja pienimmän arvon
olemassaololause 37

tasainen jakauma 133

tiheysfunktio 121

toispuolinen jatkuvuus 33

toispuoliset derivaatat 47

toispuoliset raja-arvot 22

varianssi 122

vasemmanpuoleinen jatkuvuus 33

vasemmanpuoleinen raja-arvo 22

Zenon paradoksi 171